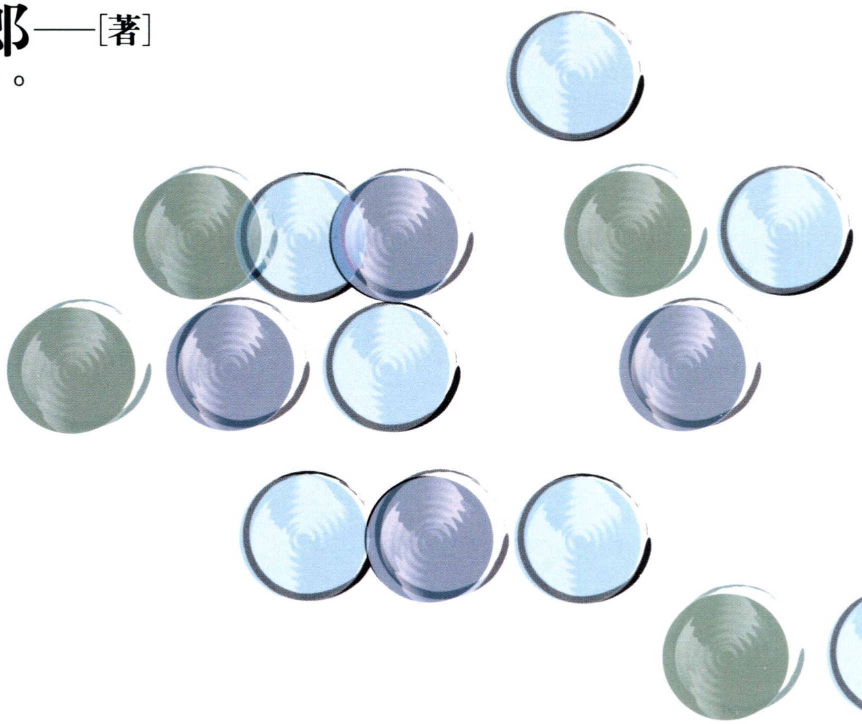
ランダム行列の基礎

R a n d o m M a t r i c e s

永尾太郎――[著]

N a g a o T a r o



東京大学出版会

ランダム行列の基礎

R a n d o m　M a t r i c e s

永尾太郎——[著]

N a g a o　T a r o

東京大学出版会

Random Matrices: An Introduction
Taro NAGAO
University of Tokyo Press, 2005
ISBN4-13-061306-5

まえがき

ランダム行列の概念は，1920 年代に，数理統計学の分野において導入された [5, 6, 92, 143]. 1950 年代になって，E.P. Wigner は，この概念に着目し，原子核物理学への転用を行った [112, 140]. すなわち，乱数を要素にもち基本的な対称性を満足する行列を考え，これが，複雑な原子核のエネルギー準位の統計的な性質（準位統計）をよく再現するだろうという仮説を立てたのである．現在では，Wigner の仮説は，自然界において（適切な条件の下では）正確に成り立つことが明らかになっている．しかし，このような非常に極端な単純化を行うことは，単純化によって自然現象を理解することに慣れている物理学者の基準で考えても，冒険的といえるだろう．

物理学においては，通常，数多くのパラメータをもつ原子・分子のモデルから出発して観測事実を説明しようとする．このような通常の手続きを無視して，いきなり全体の対称性から説きおこそうとする大胆なモデル化に対し，抵抗があるのは当然といえる．ランダム行列理論が，初期には少数の研究者のみの興味の対象であったのは，このような異端的な性格のためであろう．そのような少数の研究者の中で，F.J. Dyson は，とりわけ大きな貢献を成した．Dyson は，このような異端学説に非常な興味を示し，多くの角度から研究を行って，現在の我々にとって欠くことのできない数々の基本事実を明らかにした [35].

Dyson の貢献としては，クーロン相互作用する気体分子モデルの描像を導入したこと，動的なランダム行列モデルとしてのブラウン運動モデルを導入したこと，代数的な立場からランダム行列モデルの分類を試みたこと，エネルギー準位統計に応用するためのさまざまな統計量を考案したこと，そして，M.L. Mehta と M. Gaudin の積分法 [86] の拡張により，相関関数の四元数行列式表示を発見したことなどが挙げられる [29, 30, 31, 32, 33, 36, 85].

Dyson と同時代の研究者達により，理論のもつ多くの数学的困難が解決され，一方，エネルギー準位の実験データとの比較研究の進展により，物理学の理論としての正当性が少しずつ確立されていった [19, 61, 112]．一方，S.F. Edwards と P.W. Anderson により，スピングラス（ランダムに結合した無限スピン系）へのランダム行列理論の応用がなされたことから [38]，場の理論的方法（レプリカ法 [139]）による解析がなされるようになった．

その後，1980 年代になって，大きな進展が起こり，ランダム行列理論は，理論物理学の主要課題の 1 つに数え得るまでになった．第一には，場の理論的方法の進展，とくに，K. Efetov による超行列の方法の導入である [39, 40]．この方法によると，不純物を含む物理系の微視的な理論から，エネルギー準位分布のゆらぎを記述する有効モデルである非線形シグマモデルが導出できる．ところが，同じ非線形シグマモデルは，ランダム行列モデルからも導出されるのである．これにより，それまで理解されていなかったランダム行列理論の有効性の起源が明らかになり，微視的な根拠が確立された．

第二の進展は，量子カオス系のエネルギー準位統計においても，ランダム行列理論の予言が成立することが，数値計算および実験との比較により明らかになったことである [12, 121]．量子カオス系とは，古典極限の動力学が予測不可能な振る舞いをする量子系のことであり，磁場中の水素原子のようなごく単純な系を含む．Wigner による最初の応用においては，ランダム行列理論が原子核に適用できるのは，原子核の複雑な構造のためと理解されていたのであるが，ここに至って，むしろ古典極限の性質が重要であることが明らかになった．しかし，古典極限の性質とランダム行列の間の論理的な関係については，いまだにはっきりとはわかっていない．ただ，半古典的な理論に基づく M.V. Berry の近似理論が，おおむね正しい方向性を与えるものと考えられている [10]．最近では，より精密化された半古典論が展開され，徐々に理解が深められている [9, 93, 99, 122]．

これら，物理系のエネルギー準位統計への応用においては，普遍性 (universality) の概念が鍵となる．エネルギー準位の 1 体分布関数は，もちろん，それぞれの系の特性に依存するのだが，準位の相関を考えると，それは意外

に単純で，多くの系において共通する特性をもつことがわかっている．これにより，基本的な対称性だけが重要であるという Wigner の単純化が（準位相関に関係した物理量を考えるときに限って），正当化される．そして，基本的な対称性（普遍性クラス）の分類とそれぞれの対称性に対応した準位相関の評価が，とくに重要な課題になる．

物理学への応用は，最近になって，さらに新しい展開をみせている．ランダム行列の固有値分布と置換の内部数列の関係 [8] を通じて，表面成長過程の普遍性への関連が明らかになった [114]．また，非衝突ランダムウォーク (vicious random walk) [98] や非対称排他過程 (asymmetric exclusion process) [71, 100] などの統計力学の問題に，ランダム行列理論の結果を転用できることが注目されている．さらに，ランダム行列理論により，交通流の統計的性質（バスの運行間隔）が再現されることも発見された [77]．

物理学における重要性の増大に伴い，ランダム行列理論には，数学者の興味の対象としても深い意味があることが明らかになってきている．まず，整数論における Riemann ゼータ関数の零点分布の統計的性質が，ランダム行列理論によって再現できることが知られており [27, 76, 84, 89, 105]，素数分布に関連づけることによって説明されている [116]．また，ランダム行列固有値の最近接間隔分布や最大固有値分布が非線形微分方程式の解（パンルヴェ超越関数）によって表現されることがわかっており，非線形微分方程式や可積分力学系との関連でも興味をもたれている [70, 132, 133, 134, 135, 136]．

また，著者の意見としては，今後の展開においては，社会学への応用が面白いのではないかと考えている．とくに，金融工学の分野においては，膨大なデータが利用可能であり，J.-P. Bouchaud らにより，すでに試みが始められている [14, 51, 78, 111]．また，生態学への応用は，1970 年代に，すでに R. May によって創始されているが [25, 81]，まだやるべきことは多いように感じられる．これらの分野においては，ランダム行列モデルは極端な場合に相当し，それからのずれを正しく評価することが重要である．近年に達成された基本知識の大きな進展は，新しい分野への進出に伴っても有用になるだろう．

本書においては，準位（固有値）相関に関する結果を中心に，ランダム行列についての基礎的な知識を伝えることを目的とした．ランダム行列については，外国語で書かれた優れた本や解説が数多く出版されている（例えば，[2, 19, 25, 26, 52, 54, 55, 84, 92, 110, 112, 121, 137]）．本書では，それらよりも平易な説明を行いながら，新しい話題も盛り込んでいる．そのために，まず，最も基本的なモデルであるガウス型アンサンブルを導入し，その固有値，固有ベクトルの分布を議論する．その後で，他のモデルを議論しながら，固有値相関とその漸近形の議論を行う．膨大な応用分野の一々について詳しい解説は行わないが，これらの議論を通して，広く役に立つ知識が得られるはずである．

本書は，著者の大学院生時代以来の研究成果と，研究活動の中で得られた知識の一部をまとめたものである．これまで，さまざまな議論に付き合っていただき，有益なご助言を頂いた方々，とくに，共同研究者の方々に心からお礼を申し上げる．また，出版に当たりお世話になった，東京大学出版会編集部の丹内利香さんに，感謝の意を表したい．

2004 年 9 月　著者

目 次

第1章　四元数とヤコビアン

ランダム行列を議論するときに非常に有用で，しかし，必ずしも広くなじまれてはいない概念を，2 つ解説しておきたい．1 つは四元数，もう 1 つはヤコビアンと外積の関係である．

1.1　四元数

ランダム行列の理論においては，四元数が基本となる概念である．四元数は，アイルランドの数学者 W.R. Hamilton によって 1843 年 10 月 16 日に発見された．四元数の発見にまつわる物語は数学史上名高く，アイルランドの現地には記念碑が設置されているそうである [50].

まず，四元数 q を，

$$q = q_0 + \mathbf{q} \cdot \mathbf{e} = q_0 1 + q_1 e_1 + q_2 e_2 + q_3 e_3 \tag{1.1.1}$$

のように定義する．q_0, q_1, q_2, q_3 は複素数である．基本単位 1, e_1, e_2, e_3 の交換規則は，

$$1 \cdot 1 = 1, \quad 1 \cdot e_j = e_j \cdot 1 = e_j, \quad j = 1, 2, 3, \tag{1.1.2}$$

$$e_1^2 = e_2^2 = e_3^2 = e_1 e_2 e_3 = -1 \tag{1.1.3}$$

で与えられる．このとき，q の双対四元数は，

$$\bar{q} = q_0 - \mathbf{q} \cdot \mathbf{e} \tag{1.1.4}$$

である．q_0 をスカラー部分，$q = \bar{q}$ である四元数をスカラー四元数と呼ぶ．さらに，q_0, q_1, q_2, q_3 をそれぞれ 第 $0, 1, 2, 3$ 成分と呼ぶこともある．四元数には 2×2 行列表現があり，

$$\begin{aligned} 1 \to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ e_1 \to \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}, \\ e_2 \to \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ e_3 \to \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{1.1.5}$$

と置き換えることができる．これから，複素数の要素をもつ任意の 2×2 行列が四元数の 2×2 行列表現で書けることがわかる．

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(a+d)1 + \frac{i}{2}(b+c)e_1 - \frac{1}{2}(b-c)e_2 + \frac{i}{2}(a-d)e_3. \tag{1.1.6}$$

これより，四元数 q とその双対四元数 $\bar{q}$ の 2×2 行列表現の関係が，

$$q = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \bar{q} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \tag{1.1.7}$$

となっていることもわかる．量子力学における Pauli 行列

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{1.1.8}$$

を使うと，上の置き換えは $e_j \to -i\sigma_j,\ \ j = 1, 2, 3$ である．q の 2×2 行列表現のトレース（対角成分の和）の半分を $\mathrm{tr}\ q$ と書くことにすると，明らかに $q_0 = \mathrm{tr}\ q$ である．また，

$$\mathrm{tr}\ q_1 q_2 = \mathrm{tr}\ q_2 q_1 \tag{1.1.9}$$

が成立する．

次に，q の共役四元数を，

$$q^* = q_0^* + \mathbf{q}^* \cdot \mathbf{e} \tag{1.1.10}$$

で定義する．ここで，$*$ は複素共役を表す．$q = q^*$ となる q は実四元数，$q = -q^*$ となる q は純虚四元数である．実四元数の 2×2 行列表示の要素は必ずしも実にならないことに注意せよ．さらに，q のエルミート共役四元数を，

$$q^\dagger = \bar{q}^* = q_0^* - \mathbf{q}^* \cdot \mathbf{e} \tag{1.1.11}$$

で定義する．$q = q^\dagger$ となる q はエルミート四元数，$q = -q^\dagger$ となる q は反エルミート四元数である． q と $q^\dagger$ の 2×2 行列表示は互いにエルミート共役の関係にある．したがって，エルミート四元数の 2×2 行列表示はエルミート行列である．

四元数の積の双対，共役，エルミート共役については次の関係が成り立つ．

$$\begin{aligned} \overline{(q_1 q_2 \cdots q_n)} &= \bar{q}_n \cdots \bar{q}_2 \bar{q}_1, \\ (q_1 q_2 \cdots q_n)^* &= q_1^* q_2^* \cdots q_n^*, \\ (q_1 q_2 \cdots q_n)^\dagger &= q_n^\dagger \cdots q_2^\dagger q_1^\dagger. \end{aligned} \tag{1.1.12}$$

次に，四元数の行列 Q を考え，その要素は，

$$[Q]_{jl} = q_{jl} \tag{1.1.13}$$

であるとする．このとき双対行列 $\bar{Q}$ の要素は，

$$[\bar{Q}]_{jl} = \bar{q}_{lj} \tag{1.1.14}$$

と定義される．$\bar{Q} = Q$ となる Q は自己双対行列である．また，エルミート共役行列 $Q^\dagger$ の要素は，

$$[Q^\dagger]_{jl} = q_{lj}^\dagger \tag{1.1.15}$$

によって与えられる．$Q^\dagger = Q$ となる Q を（四元数）エルミート行列と呼ぶ．四元数行列 Q の要素をその 2×2 行列表示で置き換えて得られる複素行列を $\chi(Q)$ と書くことにしよう．このとき，$N\times N$ エルミート行列 Q に対応する $2N\times 2N$ 行列 $\chi(Q)$ は，複素数を要素にもつ普通のエルミート行列になる．また，Q の要素が実四元数になるための必要十分条件が，

$$\bar{Q} = Q^\dagger \tag{1.1.16}$$

であることも容易にわかる．したがって，自己双対かつエルミートである四元数行列の要素は実四元数である．とくに，1×1 の自己双対エルミート行列は実スカラー四元数になる．

$N\times N$ 自己双対エルミート行列 Q は，以下のように対角化できることが知られている [79, 144].

$$Q = UD\bar{U}. \tag{1.1.17}$$

ここで D は対角行列（非対角成分がゼロの行列）で，各要素は実スカラーである．U は実四元数の行列で，I を単位行列とするとき，

$$U\bar{U} = \bar{U}U = I \tag{1.1.18}$$

を満たす．このような U のことをシンプレクティック行列という．U の要素は実四元数なので，$\bar{U} = U^\dagger$ である．すなわち，

$$UU^\dagger = U^\dagger U = I \tag{1.1.19}$$

も満たされ，U の要素を 2×2 行列表示で置き換えて得られる $2N\times 2N$ 行列 $\chi(U)$ はユニタリ行列になる．D の各対角要素は実スカラーなので，その 2×2 行列表示は，

$$\begin{bmatrix} D_{jj} & 0 \\ 0 & D_{jj} \end{bmatrix} \tag{1.1.20}$$

の形になる（D_{jj} は実数）．すなわち，Q の $2N\times 2N$ 行列表示はエルミート行列であって，その固有値は実数ですべて 2 重縮退（同じ固有値が 2 度現れること）している．これは，量子力学において Kramers 縮退と呼ばれる現象である．

1.2 ヤコビアン

ランダム行列の固有値分布を考えるときには，行列の要素変数から固有値変数，固有ベクトル変数への変数変換を行う必要がある．そのときに現れるヤコビアンと，外積による計算法を学んでおこう．

N 次元ユークリッド空間内の領域 A についての積分

$$I = \int_A f(x_1, x_2, \cdots, x_N) \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_2 \cdots \mathrm{d}x_N \tag{1.2.1}$$

を考えよう．関係式

$$x_j = x_j(y_1, y_2, \cdots, y_N), \quad j = 1, 2, \cdots, N \tag{1.2.2}$$

によって実変数 $\{x_j\}$ から実変数 $\{y_j\}$ への変数変換を行うと，

$$I = \int_{A'} f(x_1(\{y_j\}), \cdots, x_N(\{y_j\})) \left| \det \left(\frac{\partial x_j}{\partial y_l} \right) \right| \mathrm{d}y_1 \cdots \mathrm{d}y_N \tag{1.2.3}$$

となることが知られている．ここで，A' は，A の変数変換による像である．つまり，$N \times N$ 行列 $\mathcal{J}$ の要素が

$$\mathcal{J}_{jl} = \frac{\partial x_j}{\partial y_l}, \quad j, l = 1, 2, \cdots, N \tag{1.2.4}$$

で与えられるとき，$\mathcal{J}$ の行列式

$$\det \mathcal{J} = \det \left(\frac{\partial x_j}{\partial y_l} \right) \tag{1.2.5}$$

はヤコビアンと呼ばれ，変数変換された積分を計算するために必要になる．

ところで，$x_j = x_j(y_1, y_2, \cdots, y_N)$ の微分は，

$$\mathrm{d}x_j = \frac{\partial x_j}{\partial y_1} \mathrm{d}y_1 + \cdots + \frac{\partial x_j}{\partial y_N} \mathrm{d}y_N \tag{1.2.6}$$

のように書ける．ヤコビアンを計算するために必要な偏微分係数は，すべてこの微分の式の中に含まれている．

ここで，微分に対して，外積 $\wedge$ を，

$$\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_l = -\mathrm{d}x_l \wedge \mathrm{d}x_j \tag{1.2.7}$$

となるように定義しよう．ただちに，同じ微分の外積については，

$$\mathrm{d}x_j \wedge \mathrm{d}x_j = 0 \tag{1.2.8}$$

となる．

実変数の微分 $\mathrm{d}x_j$ と $\mathrm{d}y_j$ の関係が，C を実行列として，

$$\mathrm{d}x_j = \sum_{l=1}^{N} C_{jl}\mathrm{d}y_l \tag{1.2.9}$$

のようになっているとしよう．$\mathrm{d}x_j$ の外積と $\mathrm{d}y_j$ の外積の関係は，同じ $\mathrm{d}y_j$ を 2 つ以上含む項はゼロになるから，

$$\begin{aligned}\bigwedge_{j=1}^{N} \mathrm{d}x_j &= \bigwedge_{j=1}^{N} \left(\sum_{l=1}^{N} C_{jl}\mathrm{d}y_l \right) \\ &= \sum_{P} C_{1P(1)}C_{2P(2)}\cdots C_{NP(N)}\mathrm{d}y_{P(1)} \wedge \mathrm{d}y_{P(2)} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_{P(N)}\end{aligned} \tag{1.2.10}$$

となる．ここで，P は，$\{1, 2, \cdots, N\}$ の置換である．置換は，互換（2 つの数の入れ替え）を組み合わせてつくることができるから，

$$\mathrm{d}y_{P(1)} \wedge \mathrm{d}y_{P(2)} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_{P(N)} = (-1)^P \mathrm{d}y_1 \wedge \mathrm{d}y_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_N \tag{1.2.11}$$

が成立する．$(-1)^P$ は，置換の符号と呼ばれ，置換 P をつくるのに必要な互換の数が偶数（偶置換）のときは $(-1)^P = 1$，奇数のとき（奇置換）は $(-1)^P = -1$ と定義される．したがって，行列式の定義より，

$$\begin{aligned}\bigwedge_{j=1}^{N} \mathrm{d}x_j &= \left(\sum_{P} (-1)^P C_{1P(1)}C_{2P(2)}\cdots C_{NP(N)} \right) \mathrm{d}y_1 \wedge \mathrm{d}y_2 \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}y_N \\ &= \det C \bigwedge_{j=1}^{N} \mathrm{d}y_j\end{aligned} \tag{1.2.12}$$

となる．一方，$\det C$ は，x_j から y_j への変数変換のヤコビアンになっている．したがって，微分の外積を考え，係数の絶対値をとることにより，ヤコビアンが評価されることがわかる．

では，変数 x_j と y_j が複素数のときにはどうなるだろうか？ 複素変数の微分 $\mathrm{d}x_j$ と $\mathrm{d}y_j$ の関係が，C を複素行列として，

$$\mathrm{d}x_j = \sum_{l=1}^{N} C_{jl}\mathrm{d}y_l \tag{1.2.13}$$

のようになっているとしよう．このとき，微分 $\mathrm{d}x_j$ の実部 $\mathrm{d}x_j^R$ と虚部 $\mathrm{d}x_j^I$ は，

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x_j^R &= \sum_{l=1}^{N}(C_{jl}^R\mathrm{d}y_l^R - C_{jl}^I\mathrm{d}y_l^I), \\ \mathrm{d}x_j^I &= \sum_{l=1}^{N}(C_{jl}^I\mathrm{d}y_l^R + C_{jl}^R\mathrm{d}y_l^I) \end{aligned} \tag{1.2.14}$$

のように書ける．したがって，上で導いた関係式 (1.2.12) を使うことにより，$\mathrm{d}x_j^R \wedge \mathrm{d}x_j^I$ の外積と $\mathrm{d}y_j^R \wedge \mathrm{d}y_j^I$ の外積の間の関係は，

$$\bigwedge_{j=1}^{N}\left(\mathrm{d}x_j^R \wedge \mathrm{d}x_j^I\right) = \det \omega_2(C) \bigwedge_{j=1}^{N}\left(\mathrm{d}y_j^R \wedge \mathrm{d}y_j^I\right) \tag{1.2.15}$$

となる．ここで，$\omega_2(C)$ は，2×2 行列の細胞

$$C_{jl}^R \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + C_{jl}^I \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.2.16}$$

からなる $2N \times 2N$ 行列である． ところが，x_j の実部・虚部から y_j の実部・虚部への変数変換のヤコビアンを考えると，行列式 $\det \omega_2(C)$ がヤコビアンになることがすぐにわかる．よって，微分の実部・虚部の外積を考え，係数の絶対値をとることにより，ヤコビアンが評価される．

いま，$N\times N$ 複素行列 C を実部と虚部に分けて，$C=C^R+iC^I$ のように書くとしよう．C^R と C^I は，$N\times N$ 実行列である．このとき，

$$\det\omega_2(C)=\det\begin{bmatrix} C^R & -C^I \\ C^I & C^R \end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix} C^R+iC^I & 0 \\ C^I & C^R-iC^I \end{bmatrix} \tag{1.2.17}$$

が導かれる．したがって，

$$\det\omega_2(C)=\det[(C^R+iC^I)(C^R-iC^I)]=|\det C|^2 \tag{1.2.18}$$

を得る．

最後に，変数が実四元数の場合を考えよう．実四元数変数の微分 $\mathrm{d}x_j$ と $\mathrm{d}y_j$ の関係が，C を実四元数行列として，

$$\mathrm{d}x_j=\sum_{l=1}^{N}C_{jl}\mathrm{d}y_l \tag{1.2.19}$$

のようになっているとする．このとき，$\mathrm{d}x_j$ の各成分 $\mathrm{d}x_j^{(s)}$ と $\mathrm{d}y_j$ の各成分 $\mathrm{d}y_j^{(s)}$ の間の関係 $(s=0,1,2,3)$ は，

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x_j^{(0)}&=\sum_{l=1}^{N}(C_{jl}^{(0)}\mathrm{d}y_l^{(0)}-C_{jl}^{(1)}\mathrm{d}y_l^{(1)}-C_{jl}^{(2)}\mathrm{d}y_l^{(2)}-C_{jl}^{(3)}\mathrm{d}y_l^{(3)}),\\
\mathrm{d}x_j^{(1)}&=\sum_{l=1}^{N}(C_{jl}^{(1)}\mathrm{d}y_l^{(0)}+C_{jl}^{(0)}\mathrm{d}y_l^{(1)}-C_{jl}^{(3)}\mathrm{d}y_l^{(2)}+C_{jl}^{(2)}\mathrm{d}y_l^{(3)}),\\
\mathrm{d}x_j^{(2)}&=\sum_{l=1}^{N}(C_{jl}^{(2)}\mathrm{d}y_l^{(0)}+C_{jl}^{(3)}\mathrm{d}y_l^{(1)}+C_{jl}^{(0)}\mathrm{d}y_l^{(2)}-C_{jl}^{(1)}\mathrm{d}y_l^{(3)}),\\
\mathrm{d}x_j^{(3)}&=\sum_{l=1}^{N}(C_{jl}^{(3)}\mathrm{d}y_l^{(0)}-C_{jl}^{(2)}\mathrm{d}y_l^{(1)}+C_{jl}^{(1)}\mathrm{d}y_l^{(2)}+C_{jl}^{(0)}\mathrm{d}y_l^{(3)})
\end{aligned} \tag{1.2.20}$$

である．したがって，複素変数のときと同様に，$\bigwedge_{s=0}^{3}\mathrm{d}x_j^{(s)}$ の外積と $\bigwedge_{s=0}^{3}\mathrm{d}y_j^{(3)}$

の外積の関係は，

$$\bigwedge_{j=1}^{N}\bigwedge_{s=0}^{3}\mathrm{d}x_j^{(s)}=\det\omega_4(C)\bigwedge_{j=1}^{N}\bigwedge_{s=0}^{3}\mathrm{d}y_j^{(s)} \tag{1.2.21}$$

となる．ただし，$\omega_4(C)$ は，4×4 行列の細胞

$$C_{jl}^{(0)}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}+C_{jl}^{(1)}\begin{bmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$
$$+C_{jl}^{(2)}\begin{bmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&-1&0&0\end{bmatrix}+C_{jl}^{(3)}\begin{bmatrix}0&0&0&-1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix} \tag{1.2.22}$$

からなる $4N\times 4N$ 行列である．一方，x_j の各成分から y_j の各成分 への変数変換のヤコビアンは，$\omega_4(C)$ の行列式で与えられる．したがって，複素数の場合と同様に，微分の第 $0,1,2,3$ 成分の外積を考え，係数の絶対値をとることにより，ヤコビアンが評価される．

ここで，$N\times N$ 実四元数行列 C の各要素を 2×2 行列表現で置き換えてみよう．前節と同じように，結果として得られる $2N\times 2N$ 行列を $\chi(C)$ と書く．このとき，

$$\det\omega_4(C)=(\det\chi(C))^2 \tag{1.2.23}$$

となる．ところが，$C=C^{(0)}+C^{(1)}e_1+C^{(2)}e_2+C^{(3)}e_3$ とするとき（$C^{(k)}$ $(k=0,1,2,3)$ は $N\times N$ 実行列），$\chi(C)$ は 2×2 行列の細胞

$$\begin{bmatrix}C_{jl}^{(0)}+iC_{jl}^{(3)}&-C_{jl}^{(1)}-iC_{jl}^{(2)}\\C_{jl}^{(1)}-iC_{jl}^{(2)}&C_{jl}^{(0)}-iC_{jl}^{(3)}\end{bmatrix} \tag{1.2.24}$$

からなるから，行列式の性質より，

$$\begin{aligned}\det\chi(C) &= \det\begin{bmatrix} C^{(0)}+iC^{(3)} & -C^{(1)}-iC^{(2)} \\ C^{(1)}-iC^{(2)} & C^{(0)}-iC^{(3)} \end{bmatrix} \\ &= \det\begin{bmatrix} C^{(0)}+iC^{(3)} & C^{(1)}+iC^{(2)} \\ -C^{(1)}+iC^{(2)} & C^{(0)}-iC^{(3)} \end{bmatrix} \\ &= \det\begin{bmatrix} C^{(0)}-iC^{(3)} & -C^{(1)}+iC^{(2)} \\ C^{(1)}+iC^{(2)} & C^{(0)}+iC^{(3)} \end{bmatrix} \qquad (1.2.25)\end{aligned}$$

を導くことができる．したがって，$\det\chi(C) = (\det\chi(C))^*$ より，$\det\chi(C)$ は実数である（さらに，非負であることが証明できる [144]）．すなわち，

$$\det\omega_4(C) = |\det\chi(C)|^2 = \det\omega_2(\chi(C)) \qquad (1.2.26)$$

を得る．ちなみに，$\det\chi(C)$ は，$N\times N$ 実四元数行列 C の行列式とみなすことができ（ Study の行列式 [128]），C の第 $0,1,2,3$ 成分の $2N$ 次の実多項式になっている．

第 2 章　ガウス型アンサンブル

ここで，いよいよランダム行列を導入する．まず，最も基本的なガウス型アンサンブルをとりあげる．直交，ユニタリ，シンプレクティックの 3 つの型があること，そして，固有値変数，固有ベクトル変数への変数変換を理解してもらいたい．その後で，これらの 3 つの型の間を結ぶブラウン運動モデルを解説する．

2.1　ガウス型直交アンサンブル

ランダム行列アンサンブルとは，要素が確率分布関数に従って分布している行列の集合である．まず，簡単な例として，2×2 実行列の場合を考えてみよう．2×2 実行列 A は，実数の要素 A_{jl} を用いて，

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \tag{2.1.1}$$

のように書ける．行列 A のトレース $\mathrm{Tr}\, A$ は A の対角要素の和であるとし，A の転置行列を A^{T} と書く（つまり，$[A^{\mathrm{T}}]_{jl} = [A]_{lj}$）．このとき，

$$\mathrm{Tr}\,(A^{\mathrm{T}}A) = A_{11}^2 + A_{12}^2 + A_{21}^2 + A_{22}^2 \tag{2.1.2}$$

が成り立つ．

一方，実数 x が（分散 σ^2 で）ガウス分布しているとき，その確率分布関数 $P(x)$ は，

$$P(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-x^2/(2\sigma^2)}\mathrm{d}x \tag{2.1.3}$$

によって与えられる．したがって，2×2 実行列 A の要素 A_{jl} が独立に（分散 1 で）ガウス分布しているとき，確率分布関数 $P(A)$ は，

$$\begin{aligned} P(A)(\mathrm{d}A) &\propto \mathrm{e}^{-(1/2)\mathrm{Tr}\,(A^{\mathrm{T}}A)}(\mathrm{d}A) \\ &= \mathrm{e}^{-(1/2)A_{11}^2}\mathrm{e}^{-(1/2)A_{12}^2}\mathrm{e}^{-(1/2)A_{21}^2}\mathrm{e}^{-(1/2)A_{22}^2}\mathrm{d}A_{11}\mathrm{d}A_{12}\mathrm{d}A_{21}\mathrm{d}A_{22} \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

のように書ける．確率分布関数を要素 A_{jl} について積分するために，測度

$$(\mathrm{d}A) = \mathrm{d}A_{11}\mathrm{d}A_{12}\mathrm{d}A_{21}\mathrm{d}A_{22} \tag{2.1.5}$$

が現れていることに注意すべきである．

さらに，行列が実対称であるという制約を課したアンサンブルを考えることができる．2×2 実対称行列 H の要素 H_{jl} が独立にガウス分布しているとき，確率分布関数は，

$$\begin{aligned} P(H)(\mathrm{d}H) &\propto \mathrm{e}^{-(1/2)\mathrm{Tr}H^2}(\mathrm{d}H) \\ &= \mathrm{e}^{-(1/2)H_{11}^2}\mathrm{e}^{-H_{12}^2}\mathrm{e}^{-(1/2)H_{22}^2}\mathrm{d}H_{11}\mathrm{d}H_{12}\mathrm{d}H_{22} \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

になる．ただし，対角成分 H_{11}, H_{22} の分散は 1，非対角成分 $H_{12} = H_{21}$ の分散は 1/2 であるとした．測度は，

$$(\mathrm{d}H) = \mathrm{d}H_{11}\mathrm{d}H_{12}\mathrm{d}H_{22} \tag{2.1.7}$$

であり，H の対称性のために，変数の数が変わったことに注意してもらいたい．

ランダム行列理論における典型的な問題は，行列要素の分布が（上の例のように）与えられているときに，固有値の分布を知ることである．とくに，行列の次数 N が大きいときに，固有値の密度や相関の漸近的な振る舞いに興味がある．行列の対称性が，それらの量にどのような影響を与えるかを知りたい．

そこで，上記の 2×2 実対称行列のアンサンブルを $N\times N$ 実対称行列の場合に一般化したガウス型直交アンサンブルを導入しよう．すなわち，ガウス型直交アンサンブルの確率分布関数は，

$$P(H)(\mathrm{d}H)\propto \mathrm{e}^{-(1/2)\mathrm{Tr}H^2}(\mathrm{d}H) = \prod_{j=1}^{N}\mathrm{e}^{-(1/2)H_{jj}^2}\mathrm{d}H_{jj}\prod_{j<l}^{N}\mathrm{e}^{-H_{jl}^2}\mathrm{d}H_{jl} \tag{2.1.8}$$

によって与えられる．このアンサンブルにおいては，H は $N\times N$ 実対称行列であり，各要素は独立にガウス分布している．

このとき，固有値，固有ベクトルを変数とすると，確率分布関数はどのように書けるであろうか．問題は，測度

$$(\mathrm{d}H)=\prod_{j=1}^{N}\mathrm{d}H_{jj}\prod_{j<l}^{N}\mathrm{d}H_{jl} \tag{2.1.9}$$

が，変数変換を行ったときにどう変わるかだが，それは，1.2 節で解説したヤコビアンの計算に帰着される．

まず，$N\times N$ 実対称行列 H は，$N\times N$ 直交行列 O によって，

$$H=OEO^{\mathrm{T}} \tag{2.1.10}$$

のように対角化されることに着目する．直交行列とは，I を単位行列とするとき，

$$O^{\mathrm{T}}O=OO^{\mathrm{T}}=I \tag{2.1.11}$$

を満たす行列である．本書では，直交行列という名称を，実直交行列（実数の要素をもつ直交行列）の意味で使う．また，対角行列（非対角成分がゼロ

の行列）E は，H の実固有値 $x_1, \cdots, x_N$ を対角成分にもつ．これにより，

$$\mathrm{d}H = \mathrm{d}OEO^{\mathrm{T}} + OE\mathrm{d}O^{\mathrm{T}} + O\mathrm{d}EO^{\mathrm{T}} \tag{2.1.12}$$

となる．$\mathrm{d}H$ は，H の要素の微分を要素とする行列であり，測度 $(\mathrm{d}H)$ とは異なることに注意する．直交行列の性質により $O^{\mathrm{T}} = O^{-1}$ なので，

$$O^{\mathrm{T}}\mathrm{d}HO = O^{\mathrm{T}}\mathrm{d}OE + E\mathrm{d}O^{\mathrm{T}}O + \mathrm{d}E \tag{2.1.13}$$

である．

左辺 $O^{\mathrm{T}}\mathrm{d}HO$ の (j,l) 成分 $(j \leq l)$ の外積を考えると，

$$\bigwedge_{j\leq l}^{N}[O^{\mathrm{T}}\mathrm{d}HO]_{jl} = p(O)\bigwedge_{j\leq l}^{N}\mathrm{d}H_{jl} \tag{2.1.14}$$

の関係があることがわかる．ただし，$p(M)$ は，$N \times N$ 実行列 M の要素の $N(N+1)$ 次の同次実係数多項式である．ところが，$M = M_1M_2$ とおくことによってわかるように，

$$p(M_1M_2) = p(M_1)p(M_2) \tag{2.1.15}$$

の関係がある．この関係は，M_1, M_2 の行列要素が複素数であっても成り立つ．直交行列 O は，対応する実反対称行列 A を使って，$O = \mathrm{e}^A$ の形に書ける．ところが，実反対称行列は，虚数単位 i をかけると反対称エルミート行列になることから，ユニタリ行列によって対角化できる．すなわち，O をユニタリ行列 V により対角化して，$O = VDV^\dagger$ と書くことができる（D は対角行列）．ユニタリ行列 V は，I を単位行列とするとき，

$$V^\dagger V = VV^\dagger = I \tag{2.1.16}$$

を満たす（V のエルミート共役 $V^\dagger$ の (j,l) 成分は，V_{lj}^* で与えられる）．したがって，$p(O) = p(VDV^\dagger) = p(V^\dagger V)p(D) = p(I)p(D)$ である．明らかに，$p(I) = 1$ であり，また，D は対角行列なので，$p(D) = (\det D)^{N+1} = (\det O)^{N+1}$ も容易にわかる．O は直交行列なので，$|\det O|^2 = |\det(O^{\mathrm{T}}O)| = |\det I| = 1$

より，$|\det O| = 1$ であり，したがって，

$$(O^{\mathrm{T}}\mathrm{d}HO) = (\mathrm{d}H) \tag{2.1.17}$$

が得られる．

そこで，(2.1.13) 式の右辺の (j,l) 成分 $(j \leq l)$ の外積を計算すれば，測度 $(\mathrm{d}H)$ を固有値変数，固有ベクトル変数で書いた結果が得られることになる．$O^{\mathrm{T}}O = I$ より，

$$O^{\mathrm{T}}\mathrm{d}O = -\mathrm{d}O^{\mathrm{T}}O, \tag{2.1.18}$$

すなわち，

$$[O^{\mathrm{T}}\mathrm{d}OE + E\mathrm{d}O^{\mathrm{T}}O + \mathrm{d}E]_{jl} = \begin{cases} (x_l - x_j)[O^{\mathrm{T}}\mathrm{d}O]_{jl}, & j < l, \\ \mathrm{d}x_j, & j = l \end{cases} \tag{2.1.19}$$

であることに注目すると，結果は，

$$(\mathrm{d}H) = \prod_{j<l}^{N} |x_j - x_l| \prod_{j=1}^{N} \mathrm{d}x_j \prod_{j<l}^{N} [O^{\mathrm{T}}\mathrm{d}O]_{jl} \tag{2.1.20}$$

である．

なお，行列 H の要素変数から，E と O の要素変数への変数変換を 1 対 1 にするためには，(1) E の対角要素の並び順を固定し，(2) O の各列ベクトルの符号の不定性を除く必要がある．(1) については，E の固有値を値の大小の順に並べることにすれば解決され，(2) については，$[O^{\mathrm{T}}\mathrm{d}O]_{jl}$ を変数に選んだ時点で解決されている．また，固有値の中に互いに等しいものがある場合は，確率がゼロなので考えないことにする．

以上のことから，ガウス型直交アンサンブルの固有値，固有ベクトルの分布関数は，

$$\begin{aligned} &p(x_1, \cdots, x_N) \prod_{j=1}^{N} \mathrm{d}x_j \prod_{j<l}^{N} [O^{\mathrm{T}}\mathrm{d}O]_{jl} \\ &\propto \prod_{j=1}^{N} \mathrm{e}^{-x_j^2/2} \prod_{j<l}^{N} |x_j - x_l| \prod_{j=1}^{N} \mathrm{d}x_j \prod_{j<l}^{N} [O^{\mathrm{T}}\mathrm{d}O]_{jl} \end{aligned} \tag{2.1.21}$$

と書ける．

ここで，行列要素が独立分布しているということの他に，ガウス型直交アンサンブルのもう 1 つの重要な特徴を明らかにすることができる．すべてのアンサンブル要素 H を，任意の 1 つの直交行列 P を用いて，

$$H \to PHP^{\mathrm{T}} \tag{2.1.22}$$

のように直交変換したとき，分布関数が不変なのである．固有値の分布は明らかに不変であり，固有ベクトルの分布が不変であることも，直交変換 $O \to PO$ の下で $O^{\mathrm{T}}\mathrm{d}O$ が不変であることからわかる．この不変性のために，直交アンサンブルと呼ぶのである．

直交変換の下での不変性は，アンサンブルが固有ベクトルの空間の中で一様分布していることを意味している．ランダム系において固有ベクトルの一様分布性が破れ，とくに確率の高い領域が生じることを，物理学では Anderson 局在と呼ぶ．ガウス型直交アンサンブルは，非局在の極限の状態に対応するモデルである．

2.2　ガウス型ユニタリアンサンブル

次に，複素数の要素をもつ $N \times N$ エルミート行列 H を考えよう．この場合には，各要素の実部と虚部がそれぞれ独立にガウス分布しているガウス型ユニタリアンサンブル

$$\begin{aligned} &P(H)(\mathrm{d}H) \propto \mathrm{e}^{-\mathrm{Tr}H^2}(\mathrm{d}H) \\ &= \prod_{j=1}^{N} \mathrm{e}^{-H_{jj}^2}\mathrm{d}H_{jj} \prod_{j<l}^{N} \mathrm{e}^{-2(H_{jl}^R)^2-2(H_{jl}^I)^2}\mathrm{d}H_{jl}^R\mathrm{d}H_{jl}^I \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

が典型的なモデルになる． 測度 $(\mathrm{d}H)$ が，

$$(\mathrm{d}H) = \prod_{j=1}^{N} \mathrm{d}H_{jj} \prod_{j<l}^{N} \mathrm{d}H_{jl}^R\mathrm{d}H_{jl}^I \tag{2.2.2}$$

に変わったことに注意せよ．

再び，固有値，固有ベクトルを変数として，確率分布関数がどのように書けるかを考える．

$N \times N$ エルミート行列 H は，ユニタリ行列 U によって，

$$H = UEU^\dagger \tag{2.2.3}$$

のように対角化されることに着目する．E は H の実固有値 $x_1, \cdots, x_N$ を対角成分にもつ対角行列，$U^\dagger$ は U のエルミート共役を表す．したがって，

$$\mathrm{d}H = \mathrm{d}UEU^\dagger + UE\mathrm{d}U^\dagger + U\mathrm{d}EU^\dagger \tag{2.2.4}$$

となる．さらに，ユニタリ行列は $U^\dagger = U^{-1}$ を満たすので，

$$U^\dagger \mathrm{d}HU = U^\dagger \mathrm{d}UE + E\mathrm{d}U^\dagger U + \mathrm{d}E \tag{2.2.5}$$

になる．

左辺の (j,j) 成分および (j,l) 成分 $(j<l)$ の実部と虚部の外積をとると，

$$\begin{aligned}&\bigwedge_{j=1}^{N}[U^\dagger \mathrm{d}HU]_{jj} \bigwedge_{j<l}^{N}\left\{[U^\dagger \mathrm{d}HU]_{jl}^R \wedge [U^\dagger \mathrm{d}HU]_{jl}^I\right\}\\ &= p(U) \bigwedge_{j=1}^{N} \mathrm{d}H_{jj} \bigwedge_{j<l}^{N}\left\{\mathrm{d}H_{jl}^R \wedge \mathrm{d}H_{jl}^I\right\}\end{aligned} \tag{2.2.6}$$

を得る．$p(M)$ は $N \times N$ 複素行列 M の要素の実部と虚部の $2N^2$ 次の同次実係数多項式である．ここで，$M = M_1M_2$ とおくと，

$$p(M_1M_2) = p(M_1)p(M_2) \tag{2.2.7}$$

の関係がわかる．ユニタリ行列 U は，対応するエルミート行列 H を用いて，$U = \mathrm{e}^{iH}$ の形に書ける．したがって，U を，ユニタリ行列 V を用いて $U = VDV^\dagger$ のように対角化できる．そこで，$p(U) = p(VDV^\dagger) = p(I)p(D)$ となる．明らかに，$p(I) = 1$ である．また，D は対角行列なので，$p(D) = |\det D|^{2N}$ が容易に示せるから，$p(U) = |\det D|^{2N} = |\det U|^{2N}$ と結論で

きる．U はユニタリ行列なので，$|\det U|^2 = |\det(U^\dagger U)| = |\det I| = 1$ より，$|\det U| = 1$ である．したがって，

$$(U^\dagger \mathrm{d}HU) = (\mathrm{d}H) \tag{2.2.8}$$

を得る．

次に，(2.2.5) 式の右辺の (j,j) 成分および (j,l) 成分 $(j<l)$ の実部と虚部の外積を計算すると，$U^\dagger U = I$ より，

$$U^\dagger \mathrm{d}U = -\mathrm{d}U^\dagger U \tag{2.2.9}$$

となることを使って，

$$(\mathrm{d}H) = \prod_{j<l}^{N} |x_j - x_l|^2 \prod_{j=1}^{N} \mathrm{d}x_j \prod_{j<l}^{N} [U^\dagger \mathrm{d}U]_{jl}^{R} [U^\dagger \mathrm{d}U]_{jl}^{I} \tag{2.2.10}$$

を得る．

こうして，ガウス型ユニタリアンサンブルの固有値，固有ベクトルの分布関数は，

$$\begin{aligned} & p(x_1, \cdots, x_N) \prod_{j=1}^{N} \mathrm{d}x_j \prod_{j<l}^{N} [U^\dagger \mathrm{d}U]_{jl}^{R} [U^\dagger \mathrm{d}U]_{jl}^{I} \\ & \propto \prod_{j=1}^{N} \mathrm{e}^{-x_j^2} \prod_{j<l}^{N} |x_j - x_l|^2 \prod_{j=1}^{N} \mathrm{d}x_j \prod_{j<l}^{N} [U^\dagger \mathrm{d}U]_{jl}^{R} [U^\dagger \mathrm{d}U]_{jl}^{I} \end{aligned} \tag{2.2.11}$$

と書けることがわかった．

ガウス型ユニタリアンサンブルはユニタリ変換の下で不変である．すなわち，すべてのアンサンブル要素 H を，任意の 1 つのユニタリ行列 V を用いて，

$$H \to VHV^\dagger \tag{2.2.12}$$

のように直交変換したとき，分布関数が不変である．これは，ユニタリ変換 $U \to VU$ の下で $U^\dagger \mathrm{d}U$ が不変であることからわかる．前と同じく，ユニタリ変換の下での不変性は，固有ベクトルの空間の中での一様分布を意味している．

2.3 ガウス型シンプレクティックアンサンブル

四元数の要素をもつ $N\times N$ 自己双対エルミート行列 H を考えよう．四元数要素 H_{jl} の成分 $H_{jl}^{(k)}$ $(k=0,1,2,3)$ を，

$$H_{jl}=H_{jl}^{(0)}1+H_{jl}^{(1)}e_1+H_{jl}^{(2)}e_2+H_{jl}^{(3)}e_3 \tag{2.3.1}$$

のように定義する．各要素の成分がそれぞれ独立にガウス分布している

$$\begin{aligned}&P(H)(\mathrm{d}H)\propto \mathrm{e}^{-2\mathrm{Tr}H^2}(\mathrm{d}H)\\&=\prod_{j=1}^{N}\mathrm{e}^{-2H_{jj}^2}\mathrm{d}H_{jj}\prod_{j<l}^{N}\prod_{k=0}^{3}\mathrm{e}^{-4(H_{jl}^{(k)})^2}\mathrm{d}H_{jl}^{(k)}\end{aligned} \tag{2.3.2}$$

を，ガウス型シンプレクティックアンサンブルと呼ぶ．測度 $(\mathrm{d}H)$ は，

$$(\mathrm{d}H)=\prod_{j=1}^{N}\mathrm{d}H_{jj}\prod_{j<l}^{N}\prod_{k=0}^{3}\mathrm{d}H_{jl}^{(k)} \tag{2.3.3}$$

である．固有値，固有ベクトルを変数とすると，確率分布関数はどのように書けるであろうか．

$N\times N$ 自己双対エルミート行列 H は，シンプレクティック行列 U によって，

$$H=UEU^\dagger \tag{2.3.4}$$

のように対角化される．E は H の実スカラーの固有値 $x_1,\cdots,x_N$ を対角成分にもつ対角行列，$U^\dagger$ は U のエルミート共役を表す．U の要素は実四元数であり，したがって，$U^\dagger=\bar{U}$ である．両辺の微分をとると，

$$\mathrm{d}H=\mathrm{d}UEU^\dagger+UE\mathrm{d}U^\dagger+U\mathrm{d}EU^\dagger \tag{2.3.5}$$

となる．シンプレクティック行列は $U^\dagger=U^{-1}$ を満たすので，

$$U^\dagger\mathrm{d}HU=U^\dagger\mathrm{d}UE+E\mathrm{d}U^\dagger U+\mathrm{d}E \tag{2.3.6}$$

を得る．

左辺の (j,j) 成分および (j,l) 成分 $(j<l)$ の第 $0,1,2,3$ 成分の外積をとると，

$$\bigwedge_{j=1}^{N}[U^\dagger \mathrm{d}HU]_{jj}\bigwedge_{j<l}^{N}\bigwedge_{k=0}^{3}[U^\dagger \mathrm{d}HU]_{jl}^{(k)} \\ = p(\chi(U))\bigwedge_{j=1}^{N}\mathrm{d}H_{jj}\bigwedge_{j<l}^{N}\bigwedge_{k=0}^{3}\mathrm{d}H_{jl}^{(k)} \tag{2.3.7}$$

を得る．ここで，$N\times N$ 実四元数行列 M の $2N\times 2N$ 次行列表現を，$\chi(M)$ と書くことを思い出そう．$p(\chi(M))$ は，M の要素の第 $0,1,2,3$ 成分の $2N(2N-1)$ 次の同次実係数多項式である．ここで，$M=M_1M_2$ とおくと，$\chi(M_1M_2)=\chi(M_1)\chi(M_2)$ より，

$$p(\chi(M_1)\chi(M_2)) = p(\chi(M_1))p(\chi(M_2)) \tag{2.3.8}$$

であることがわかる．この関係は，M_1, M_2 の要素の第 $0,1,2,3$ 成分が複素数であっても成り立つ．シンプレクティック行列 U は，反自己双対エルミート行列 A $(A^\dagger=-A)$ を使って，$U=\mathrm{e}^A$ の形に書ける．$i\chi(A)$ は $2N\times 2N$ エルミート行列であるから，$\chi(U)$ は，$2N\times 2N$ ユニタリ行列 V によって $\chi(U)=V\chi(D)V^\dagger$ のように対角化される（D は対角四元数行列で，その対角要素は第 0 成分および第 3 成分のみをもつ実四元数になる）．したがって，$p(\chi(U))=p(V\chi(D)V^\dagger)=p(I)p(\chi(D))$ である．ここで，$p(I)=1$ であり，また，$p(\chi(D))=(\det\chi(D))^{2N-1}$ なので，$p(\chi(U))=(\det\chi(D))^{2N-1}=(\det\chi(U))^{2N-1}$ になる．U はシンプレクティック行列なので，$|\det\chi(U)|^2=|\det\chi(U^\dagger U)|=|\det I|=1$ である．したがって，

$$(U^\dagger \mathrm{d}HU) = (\mathrm{d}H) \tag{2.3.9}$$

を得る．

次に，(2.3.6) 式の右辺の (j,j) 成分および (j,l) 成分 $(j<l)$ の第 $0,1,2,3$ 成分の外積を計算すると，$U^\dagger U=I$ より，

$$U^\dagger \mathrm{d}U = -\mathrm{d}U^\dagger U \tag{2.3.10}$$

となることを使って，

$$(\mathrm{d}H)=\prod_{j<l}^{N}|x_j-x_l|^4\prod_{j=1}^{N}\mathrm{d}x_j\prod_{j<l}^{N}\prod_{k=0}^{3}[U^\dagger\mathrm{d}U]_{jl}^{(k)} \tag{2.3.11}$$

を得る．

以上のことから，ガウス型シンプレクティックアンサンブルの固有値，固有ベクトルの分布関数は，

$$\begin{aligned}&p(x_1,\cdots,x_N)\prod_{j=1}^{N}\mathrm{d}x_j\prod_{j<l}^{N}\prod_{k=0}^{3}[U^\dagger\mathrm{d}U]_{jl}^{(k)}\\&\propto\prod_{j=1}^{N}\mathrm{e}^{-2x_j^2}\prod_{j<l}^{N}|x_j-x_l|^4\prod_{j=1}^{N}\mathrm{d}x_j\prod_{j<l}^{N}\prod_{k=0}^{3}[U^\dagger\mathrm{d}U]_{jl}^{(k)}\end{aligned} \tag{2.3.12}$$

の形になることがわかった．

ガウス型シンプレクティックアンサンブルは，シンプレクティック変換の下で不変である．すなわち，すべてのアンサンブル要素 H を，任意の 1 つのシンプレクティック行列 V を用いて，

$$H\to VHV^\dagger \tag{2.3.13}$$

のように直交変換したとき，分布関数が変わらない．これは，シンプレクティック変換 $U\to VU$ の下で $U^\dagger\mathrm{d}U$ が不変であることからわかり，固有ベクトルの空間の中での一様分布を意味する．

2.4 ブラウン運動モデル

これまで，3 つの対称性について，それぞれ異なるランダム行列モデルが定義できることを示した．それでは，これらの対称性の間の遷移は，どのようなモデルによって記述されるのであろうか．物理学において，ガウス型直交アンサンブルおよびガウス型シンプレクティックアンサンブルは，時間反

転対称性をもつ系のエネルギー準位統計に応用される．スピン軌道相互作用があり，かつ空間回転対称性がないことによって，後者は前者と区別される．一方，時間反転対称性がないときには，ガウス型ユニタリアンサンブルが適用される．時間反転対称な物理系があったとき，それに磁場をかけることにより，時間反転対称性を破ることができる．このとき，非常に弱い磁場の領域においては，異なる対称性の間の遷移が観察されるはずである．このような状況は，いままで述べたような固定された対称性をもつモデルでは記述できない．行列 $H^{(0)}$ のアンサンブルから別の対称性（あるいは同じ対称性）をもつ行列 $H^{(\infty)}$ のアンサンブルへの遷移は，以下で紹介するブラウン運動モデルによって記述される．$H^{(\infty)}$ を，実対称，複素エルミート，あるいは四元数自己双対エルミート行列であるとし，$H^{(0)}$ は，$H^{(\infty)}$ よりも制限された対称性か，あるいは同じ対称性をもつ行列とする．つまり，$H^{(\infty)}$ が複素エルミート行列であれば $H^{(0)}$ は実対称，複素エルミート，四元数自己双対エルミート行列のいずれにもなり得る．

Dyson は，次のような組み合わせ

$$H = \mathrm{e}^{-\tau}(H^{(0)} + \sqrt{\mathrm{e}^{2\tau} - 1}H^{(\infty)}) \tag{2.4.1}$$

をつくり，パラメータ τ を時刻とみなしたときに，その運動を記述することを提案した [30]．これが，Dyson のブラウン運動モデルである．行列 H は，時刻 $\tau = 0$ においては，$H^{(0)}$ に等しく，長時間極限 $\tau \to \infty$ においては，$H^{(\infty)}$ に漸近する．たとえば，$H^{(\infty)}$ の確率分布がガウス型であれば，Dyson のブラウン運動モデルの確率分布関数は，

$$P(H^{(0)}, H; \tau)(\mathrm{d}H) = 2^{-N/2}(\beta/(\pi(1 - \mathrm{e}^{-2\tau})))^{(N/2)+(\beta N(N-1)/4)}$$
$$\times \exp\left[-\frac{\beta}{2(1 - \mathrm{e}^{-2\tau})}\mathrm{Tr}\left\{\left(H - \mathrm{e}^{-\tau}H^{(0)}\right)^2\right\}\right](\mathrm{d}H) \tag{2.4.2}$$

の形をとる．$H^{(\infty)}$ が，実対称，複素エルミート，あるいは四元数自己双対エルミート行列の場合に対応して，パラメータ β は，それぞれ，$\beta = 1, 2, 4$ の値をとり，また，測度 $(\mathrm{d}H)$ は，それぞれ，(2.1.9), (2.2.2), (2.3.3) によっ

て与えられる．

それでは，行列 $H^{(\infty)}$ が複素エルミート行列 ($\beta = 2$) の場合を考えてみよう．$H^{(\infty)}$ の確率分布がガウス型であれば，規格化定数を含む確率分布関数は，

$$P(H^{(0)}, H; \tau)(\mathrm{d}H) = 2^{N(N-1)/2}/(\pi(1-\mathrm{e}^{-2\tau}))^{N^2/2}$$
$$\times \exp\left[-\mathrm{Tr}\left\{\left(H - \mathrm{e}^{-\tau}H^{(0)}\right)^2\right\}/(1-\mathrm{e}^{-2\tau})\right](\mathrm{d}H) \qquad (2.4.3)$$

のように書ける．測度 $(\mathrm{d}H)$ は，(2.2.2) より，

$$(\mathrm{d}H) = \prod_{j=1}^{N} \mathrm{d}H_{jj} \prod_{j<l}^{N} \mathrm{d}H_{jl}^{R}\mathrm{d}H_{jl}^{I} \qquad (2.4.4)$$

である．

$P(H^{(0)}, H; \tau)$ の H の要素についての微分を計算すると，Fokker-Planck 方程式

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = \Delta P + \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial H_{jj}}(H_{jj}P)$$
$$+ \sum_{j<l}^{N}\left[\frac{\partial}{\partial H_{jl}^{R}}(H_{jl}^{R}P) + \frac{\partial}{\partial H_{jl}^{I}}(H_{jl}^{I}P)\right] \qquad (2.4.5)$$

を得る．ここで，Δ は Laplace-Beltrami 演算子

$$\Delta = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial (H_{jj})^2} + \frac{1}{4}\sum_{j<l}^{N}\left[\frac{\partial^2}{\partial (H_{jl}^{R})^2} + \frac{\partial^2}{\partial (H_{jl}^{I})^2}\right] \qquad (2.4.6)$$

である．

一般に，Laplace-Beltrami 演算子は線素

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^{\mu}\mathrm{d}x^{\nu} \qquad (2.4.7)$$

によって定義され，線素の表式の中に現れる計量テンソル $g_{\mu\nu}$ を使って，

$$\Delta = \sum_{\mu,\nu}\frac{1}{\sqrt{|\det g|}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left[g^{-1}\right]_{\mu\nu}\sqrt{|\det g|}\frac{\partial}{\partial x^{\nu}} \qquad (2.4.8)$$

のように書ける．この関係は，座標変換を行うときに便利である．以下で説明するように，線素を計算することにより計量テンソルの新しい座標における表現を求め，その結果を使って，Laplace-Beltrami 演算子の新しい表現を導くことができるからである．

同じ線素を，新しい座標 y^μ では，

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{\mu,\nu} g'_{\mu\nu} \mathrm{d}y^\mu \mathrm{d}y^\nu \tag{2.4.9}$$

と書くとしよう．行列 $\mathcal{J}$ の (μ,ν) 成分を，

$$\mathcal{J}^\mu_\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu} \tag{2.4.10}$$

で定義するなら，

$$g' = \mathcal{J}^{\mathrm{T}} g \mathcal{J} \tag{2.4.11}$$

が成り立つ．したがって，

$$|\det g'| = |\det g||\det \mathcal{J}|^2 \tag{2.4.12}$$

である．$\det \mathcal{J}$ は，座標 x^μ から座標 y^μ への変数変換のヤコビアンであることに注意しよう．(2.4.11), (2.4.12) を使うことにより，新しい座標系による Laplace-Beltrami 演算子の表現

$$\Delta = \sum_{\mu,\nu} \frac{1}{\sqrt{|\det g'|}} \frac{\partial}{\partial y^\mu} \left[(g')^{-1} \right]_{\mu\nu} \sqrt{|\det g'|} \frac{\partial}{\partial y^\nu} \tag{2.4.13}$$

が導かれる．

いまの場合には，Laplace-Beltrami 演算子 (2.4.6) に対応する線素は，

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= 2\sum_{j=1}^N (\mathrm{d}H_{jj})^2 + 4\sum_{j<l}^N \left[(\mathrm{d}H^R_{jl})^2 + (\mathrm{d}H^I_{jl})^2 \right] \\ &= 2\sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N \mathrm{d}H_{jl} \mathrm{d}H^*_{jl} \end{aligned} \tag{2.4.14}$$

である．ここまで，行列要素を座標としてきたが，固有値と固有ベクトルを座標とするとどうなるか，線素を使って考えてみよう．行列 H は，

$$H = UEU^\dagger \tag{2.4.15}$$

のように対角化される．ここで，U は $N \times N$ ユニタリ行列であり，E は実数 $x_1, \cdots, x_N$ を要素とする対角行列である．まず，$\mathrm{d}H_{jl}$ は，

$$\mathrm{d}H_{jl} = \sum_{k=1}^{N} U_{jk} U_{lk}^* \mathrm{d}x_k + \mathrm{d}A_{jl} \tag{2.4.16}$$

になる．ただし，

$$\mathrm{d}A_{jl} = \sum_{k=1}^{N} \left[\mathrm{d}U_{jk} U_{lk}^* + U_{jk} \mathrm{d}U_{lk}^*\right] x_k \tag{2.4.17}$$

である．したがって，行列 U のユニタリ性により，$U^\dagger U = UU^\dagger = I$，かつ $U^\dagger \mathrm{d}U = -\mathrm{d}U^\dagger U$ であるから，

$$\mathrm{d}s^2 = 2\sum_{k=1}^{N} (\mathrm{d}x_k)^2 + 2\sum_{j=1}^{N}\sum_{l=1}^{N} \mathrm{d}A_{jl}\mathrm{d}A_{jl}^* \tag{2.4.18}$$

が導かれる．ここで，x_j の微分と A_{jl} の微分の両方が含まれる項がないことが重要である．線素と Laplace-Beltrami 演算子の間の関係を使うと，

$$\Delta = \frac{1}{2J} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(J \frac{\partial}{\partial x_j} \right) + \Delta_U \tag{2.4.19}$$

を得る．ここで，Δ_U は，U に関係する変数の微分を含む演算子である．J は，すでに 2.2 節で評価したヤコビアンの絶対値（(2.2.10) 参照）および (2.4.12) より，

$$J = \prod_{j<l}^{N} |x_j - x_l|^2 \tag{2.4.20}$$

とおくことができる．こうして，固有値と固有ベクトルの運動を分離できたので，確率分布関数 $P(H^{(0)}, H; \tau)$ が固有値と時刻 τ だけに依存するなら，確率運動方程式

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = \frac{1}{2J} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(J \frac{\partial P}{\partial x_j} \right) + \sum_{j=1}^{N} x_j \frac{\partial P}{\partial x_j} + N^2 P \tag{2.4.21}$$

に従うことがわかる．さらに，固有値の確率分布関数を，

$$p(x_1, x_2, \cdots, x_N; \tau) \prod_{j=1}^{N} \mathrm{d}x_j \tag{2.4.22}$$

とするとき，p は JP に比例していることを考慮して，$P = p/J$ の代入を行う．ここで，関係

$$\sum_{j=1}^{N} \sum_{l \neq j}^{N} \frac{x_j}{x_j - x_l} = \frac{N(N-1)}{2} \tag{2.4.23}$$

に注意すると，固有値に対する Fokker-Planck 方程式

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} = \mathcal{L}p, \quad \mathcal{L} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial W}{\partial x_j} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j} \mathrm{e}^{-2W} \frac{\partial}{\partial x_j} \mathrm{e}^{2W} \tag{2.4.24}$$

を得る．ただし，重み関数 W は，

$$W = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} x_j^2 - \sum_{j<l}^{N} \log |x_j - x_l| \tag{2.4.25}$$

である．

$H^{(\infty)}$ がその他の対称性をもつ場合（$\beta = 2$ 以外の場合）も，同様に考えることができる．その結果，H の固有値の確率分布関数は，一般に，Fokker-Planck 方程式

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} = \mathcal{L}p, \quad \mathcal{L} = \frac{1}{\beta} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_j} \mathrm{e}^{-\beta W} \frac{\partial}{\partial x_j} \mathrm{e}^{\beta W} \tag{2.4.26}$$

を満たすことがわかる．Fokker-Planck 方程式の初期条件は，$\tau=0$ において $H^{(0)}$ の固有値の確率分布関数に一致する．一方，長時間極限 $\tau\to\infty$ においては，確率分布関数は $H^{(0)}$ によらなくなる．すなわち，H の固有値を $x_1, x_2, \cdots, x_N$ とすると，

$$\lim_{\tau\to\infty} p \propto \mathrm{e}^{-\beta W} = \prod_{j=1}^{N} \mathrm{e}^{-(\beta/2)x_j^2} \prod_{j<l}^{N} |x_j - x_l|^{\beta} \tag{2.4.27}$$

である．このとき，$\beta = 1, 2, 4$ のそれぞれの値に応じて，これまで議論してきたガウス型直交，ユニタリ，シンプレクティックアンサンブルが得られる ((2.1.20), (2.2.10), (2.3.11) 参照)．このことからも，パラメータ β により，$H^{(\infty)}$ の対称性が決まることがわかる．

Fokker-Planck 方程式を解くために，新しい演算子 $\mathcal{H}$ を，

$$-\frac{1}{\beta}(\mathcal{H} - E_0) = \mathrm{e}^{\beta W/2}\mathcal{L}\mathrm{e}^{-\beta W/2} \tag{2.4.28}$$

のように導入する．E_0 は固有値によらない定数である．関係

$$\sum_{j=1}^{N} \sum_{\substack{k\neq j,\ l\neq j \\ (k\neq l)}} \frac{1}{x_j - x_k}\frac{1}{x_j - x_l} = 0 \tag{2.4.29}$$

を使うと，すぐに，

$$\mathcal{H} = -\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + \frac{\beta^2}{4}\sum_{j=1}^{N} x_j^2 + \beta\left(\frac{\beta}{2} - 1\right)\sum_{j<l}^{N} \frac{1}{(x_j - x_l)^2} \tag{2.4.30}$$

を得る．この演算子は，逆 2 乗型の相互作用項をもつ 1 次元多粒子系のハミルトニアンであり，そのような系を Calogero-Sutherland 系と呼ぶ [22, 129]. Calogero-Sutherland 系については，すでに多くの研究がなされている．

ハミルトニアン $\mathcal{H}$ に対する虚数時間シュレーディンガー方程式

$$-\beta\frac{\partial}{\partial \tau}\Psi = \mathcal{H}\Psi \tag{2.4.31}$$

をとりあげ，そのグリーン関数解

$$\Psi = G_S(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_N^0; x_1, x_2, \cdots, x_N; \tau) \tag{2.4.32}$$

を考える．グリーン関数解とは，初期条件が $x_j = x_j^0$ になるように，

$$G_S(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_N^0; x_1, x_2, \cdots, x_N; 0) = \prod_{j=1}^{N} \delta(x_j - x_j^0) \tag{2.4.33}$$

を満たす解である（$\delta(x)$ は Dirac のデルタ関数であり，任意関数 $f(x)$ に対して，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)\mathrm{d}x = f(0) \tag{2.4.34}$$

を満たす）．ただちに，Fokker-Planck 方程式のグリーン関数解 G は，

$$\begin{aligned} & G(x_1^0, \cdots, x_N^0; x_1, \cdots, x_N; \tau) \\ = \ & \mathrm{e}^{\tau E_0/\beta} \frac{\mathrm{e}^{-\beta W(x_1, \cdots, x_N)/2}}{\mathrm{e}^{-\beta W(x_1^0, \cdots, x_N^0)/2}} G_S(x_1^0, \cdots, x_N^0; x_1, \cdots, x_N; \tau) \end{aligned} \tag{2.4.35}$$

で与えられることがわかる．

したがって，G_S がわかれば，Fokker-Planck 方程式のグリーン関数解が得られることになる．$\beta = 2$ のときには，演算子 $\mathcal{H}$ の相互作用項が消えてとくに単純になるので，その場合に，G_S を計算してみよう．まず，e^{-2W} は，異なる固有値いずれかが同じ値をとるときゼロになることに注意する．したがって，シュレーディンガー方程式によって記述される多粒子系には，非衝突の拘束がかかっている．相互作用項がないとき，このような多粒子系は，自由フェルミオン系として実現される．自由フェルミオン系のグリーン関数解は，$N = 1$ のときのグリーン関数解 $g(x^0, x; \tau)$ を用いて，行列式の形

$$G_S(x_1^0, \cdots, x_N^0; x_1, \cdots, x_N; \tau) = \det[g(x_j^0, x_l; \tau)]_{j,l=1,\cdots,N} \tag{2.4.36}$$

に書ける．いずれかの $j \neq l$ に対して $x_j = x_l$ となると，行列式の性質より G_S はゼロになるので，非衝突の拘束がかかっていることがわかる．さらに，

この G_S が，虚数時間シュレーディンガー方程式 (2.4.31) を満たしていることも容易にわかるので，確認してもらいたい．

$N=1$ のときのシュレーディンガー方程式は，

$$-2\frac{\partial\Psi}{\partial\tau}=\left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2}+x^2\right]\Psi \tag{2.4.37}$$

である．その解は，Hermite 多項式

$$H_n(x)=(-1)^n\mathrm{e}^{x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{e}^{-x^2} \tag{2.4.38}$$

を用いることにより，

$$\Psi_n(x;\tau)=\frac{1}{2^{n/2}\pi^{1/4}\sqrt{n!}}\mathrm{e}^{-\gamma_n\tau}\mathrm{e}^{-x^2/2}H_n(x),\quad n=0,1,2,\cdots \tag{2.4.39}$$

と書ける．ただし，

$$\gamma_n=n+\frac{1}{2} \tag{2.4.40}$$

である．したがって，1 体 ($N=1$) のグリーン関数は，

$$\begin{aligned}g(x^0,x;\tau)&=\sum_{n=0}^{\infty}\Psi_n(x^0;0)\Psi_n(x;\tau)\\&=\mathrm{e}^{-((x^0)^2+x^2)/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n(x^0)C_n(x)}{h_n}\mathrm{e}^{-\gamma_n\tau}\end{aligned} \tag{2.4.41}$$

になる．$C_n(x)$ は，最高次の項の係数が 1 である n 次多項式で，直交関係

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}C_m(x)C_n(x)\mathrm{d}x=h_n\delta_{mn} \tag{2.4.42}$$

を満たす．ただし，

$$\delta_{mn}=\begin{cases}1, & m=n,\\0, & m\neq n\end{cases} \tag{2.4.43}$$

である．Hermite 多項式 $H_n(x)$ を用いると，

$$C_n(x)=\frac{1}{2^n}H_n(x) \tag{2.4.44}$$

と書ける．規格化定数 h_n は，

$$h_n = \frac{\sqrt{\pi} n!}{2^n} \tag{2.4.45}$$

である．また，シュレーディンガー方程式の解の完全性より，

$$g(x^0, x; 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n(x^0; 0)\Psi_n(x; 0) = \delta(x^0 - x) \tag{2.4.46}$$

が成り立つ．この結果より，Fokker-Planck 方程式のグリーン関数解は，

$$\begin{aligned} &G(x_1^0, \cdots, x_N^0; x_1, \cdots, x_N; \tau) \\ &= \mathrm{e}^{\tau E_0/2} \prod_{j=1}^{N} \mathrm{e}^{-(x_j)^2/2+(x_j^0)^2/2} \prod_{j<l}^{N} \frac{(x_j - x_l)}{(x_j^0 - x_l^0)} \det[g(x_j^0, x_l; \tau)]_{j,l=1,\cdots,N} \end{aligned} \tag{2.4.47}$$

で与えられることがわかる．

ここで，出発点の確率分布関数 (2.4.3) は，ユニタリ行列 U を使って，

$$P(H^{(0)}, H; \tau) \propto \exp\Big[-\mathrm{Tr}\left\{\left(UEU^\dagger - \mathrm{e}^{-\tau} E^0\right)^2\right\}/(1 - \mathrm{e}^{-2\tau})\Big] \tag{2.4.48}$$

のように書けることに注目しよう（E, E^0 は対角行列）．グリーン関数解は，この確率分布関数をユニタリ行列 U について積分した結果とみなすこともできる．このようなユニタリ行列についての積分公式は，Harish Chandra によって発見された関係の特別な場合に相当する（Itzykson-Zuber 積分と呼ばれることもある）[62, 66, 83].

さて，グリーン関数解がわかると，全固有値分布関数 p を，

$$\begin{aligned} &p(x_1^1, \cdots, x_N^1; x_1^2, \cdots, x_N^2; \cdots; x_1^M, \cdots, x_N^M) \\ &= \frac{1}{N!} \int \mathrm{d}x_1^0 \cdots \int \mathrm{d}x_N^0 p_0(x_1^0, \cdots, x_N^0) \\ &\times \prod_{l=1}^{M} G(x_1^{l-1}, \cdots, x_N^{l-1}; x_1^l, \cdots, x_N^l; \tau_l - \tau_{l-1}), \\ &\tau_0 = 0 \end{aligned} \tag{2.4.49}$$

にしたがって計算することができる．ここで，$p_0(x_1^0,\cdots,x_N^0)$ は，$\tau=0$ における初期分布である．初期条件としては，$H^{(0)}$ が実対称行列および四元数自己双対エルミート行列の場合を考える（初期条件が，ランダム行列でなく固定された行列の場合 [17] も考えることができるが，本書では扱わない）．$H^{(0)}$ が実対称行列のときの初期分布は，ガウス型直交アンサンブルに対する結果 (2.1.21) より，

$$p_0(x_1,\cdots,x_N) \propto \prod_{j=1}^{N} \sqrt{u(x_j)} \prod_{j<l}^{N} |x_j - x_l| \tag{2.4.50}$$

ととればよい．初期分布がガウス型アンサンブルの場合には，$u(x)$ はガウス分布の形をとるが，ここでは，一般の関数形を許すことにする．次に，$H^{(0)}$ が四元数自己双対エルミート行列の場合を考えよう．ガウス型シンプレクティックアンサンブルの議論においては，$N\times N$ の四元数自己双対エルミート行列を扱った．しかし，ここでは，四元数行列の大きさを $N/2\times N/2$（N は偶数）にしておき，その $N\times N$ 行列表示が $N\times N$ 複素エルミート行列に遷移するのが自然である．このとき，初期状態は 2 重縮退（1.1 節で述べた Kramers 縮退）しており，ブラウン運動の進行により縮退が解けることになる．ガウス型シンプレクティックアンサンブルに対する結果 (2.3.12) において N を $N/2$ に置き換え，Kramers 縮退を考慮することにより，初期分布

$$p_0(x_1,\cdots,x_N) \propto \sum_P \prod_{j=1}^{N/2} u(x_j)\delta(x_j - x_{j+N/2}) \prod_{j<l}^{N/2} |x_j - x_l|^4 \tag{2.4.51}$$

を得る（N は偶数）．重み関数 $u(x)$ としては，さしあたり，ガウス分布に限らない一般の関数形を許すことにする．また，和 $\sum_P$ を y_j の置換に対してとり，初期分布が粒子の入れ替えに対して対称になるようにしている．

それぞれの p_0 に対して，初期状態 $x_1^0,\cdots,x_N^0$ についての積分を実行することができる [20] が，その結果を表現するために，反対称行列 A のパフィアン (Pfaffian) を導入しよう．

パフィアンは，$N\times N$ 反対称行列 A の要素を A_{jl}，$j,l=1,2,\cdots,N$ と

するとき，

$$\mathrm{Pf}[A] = \begin{cases} \dfrac{1}{(N/2)!}\displaystyle\sum_P{}' (-1)^P A_{j_1\ j_2} A_{j_3\ j_4} \cdots A_{j_{N-1}\ j_N}, & N\text{ が偶数のとき,} \\ 0, & N\text{ が奇数のとき} \end{cases} \tag{2.4.52}$$

のように定義される．ここで，P は $(1, 2, \cdots, N)$ の置換 $(j_1, j_2, \cdots, j_N)$ を表し，$(-1)^P$ は置換の符号（すなわち，偶置換に対しては 1，奇置換に対しては -1）である．P についての和 $\sum_P{}'$ は，拘束 $j_1 < j_2, j_3 < j_4, \cdots, j_{N-1} < j_N$ を満たすすべての P についてとる．たとえば，2×2 反対称行列

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix} \tag{2.4.53}$$

のパフィアンは，$\mathrm{Pf}[A] = a$ である．

パフィアンの性質を，いくつか挙げておこう．

(1) パフィアンの 2 乗は，行列式である．

(2) 反対称行列 A の j 行に定数 c をかけ，さらに j 列にも c をかけると，結果は反対称行列 A' になる．このとき，$\mathrm{Pf}[A'] = c\mathrm{Pf}[A]$ である．

(3) 反対称行列 A の j 行と l 行を交換し $(j \neq l)$，さらに j 列と l 列を交換すると，結果は反対称行列 A' になる．このとき，$\mathrm{Pf}[A'] = -\mathrm{Pf}[A]$ である．

(4) 反対称行列 A の j 行に定数 c をかけて l 列に加え $(j \neq l)$，さらに j 列にも c をかけて l 列に加えると，結果は反対称行列 A' になる．このとき，$\mathrm{Pf}[A'] = \mathrm{Pf}[A]$ である．

パフィアンの 2 乗が行列式であるのにもかかわらず，あえて行列式の平方根の形に書かないのは，パフィアンの符号が重要だからである．

さて，パフィアンが定義できたので，初期状態についての積分を行う．N が偶数のときと奇数のときに分けて議論する．

N が偶数の場合

N が偶数のとき，初期条件が実対称行列の場合には，

$$I(y_1, \cdots, y_N) = \int \cdots \int \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_N \prod_{j<l}^{N} \mathrm{sign}(x_j - x_l) \det[g(x_j, y_l)]_{j,l=1,2,\cdots,N} \tag{2.4.54}$$

の形の積分を考えればよい．ここで，符号関数 $\mathrm{sign}(x)$ は，

$$\mathrm{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases} \tag{2.4.55}$$

のように定義される．まず，奇数番目の変数 $x_1, x_3, \cdots, x_{N-1}$ についての積分を行うと，符号関数を積分範囲にとりこむことができて，

$$\begin{aligned} I(y_1, \cdots, y_N) &\propto \int \cdots \int \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_4 \cdots \mathrm{d}x_N \det \begin{bmatrix} \displaystyle\int_{x_{2j-2}}^{x_{2j}} \mathrm{d}x g(x, y_l) \\ g(x_{2j}, y_l) \end{bmatrix}_{j=1,2,\cdots,N/2,\ l=1,2,\cdots,N} \\ &= \int \cdots \int \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_4 \cdots \mathrm{d}x_N \det \begin{bmatrix} \displaystyle\int_{-\infty}^{x_{2j}} \mathrm{d}x g(x, y_l) \\ g(x_{2j}, y_l) \end{bmatrix}_{j=1,2,\cdots,N/2,\ l=1,2,\cdots,N} \end{aligned} \tag{2.4.56}$$

となる ($x_0 = -\infty$)．次に，行列式の定義により，

$$
\begin{aligned}
&I(y_1, \cdots, y_N) \\
&\propto \int \cdots \int \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_4 \cdots \mathrm{d}x_N \sum_P (-1)^P \\
&\times \prod_{j=1}^{N/2} \int_{-\infty}^{x_{2j}} \mathrm{d}x g(x, y_{P(2j-1)}) g(x_{2j}, y_{P(2j)}) \\
&= \int \cdots \int \mathrm{d}x_2 \mathrm{d}x_4 \cdots \mathrm{d}x_N {\sum_P}' (-1)^P \\
&\times \prod_{j=1}^{N/2} \int_{-\infty}^{x_{2j}} \mathrm{d}x \left[g(x, y_{P(2j-1)}) g(x_{2j}, y_{P(2j)}) - g(x, y_{P(2j)}) g(x_{2j}, y_{P(2j-1)}) \right]
\end{aligned} \tag{2.4.57}
$$

を得る．最後に，偶数番目の変数についての積分を行うと，

$$
\begin{aligned}
&I(y_1, \cdots, y_N) \\
&\propto {\sum_P}' (-1)^P \prod_{j=1}^{N/2} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y \int_{-\infty}^{y} \mathrm{d}x \left\{ g(x, y_{P(2j-1)}) g(y, y_{P(2j)}) \right. \right. \\
&\qquad\qquad \left. \left. - g(x, y_{P(2j)}) g(y, y_{P(2j-1)}) \right\} \right] \\
&\propto \mathrm{Pf} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}y \int_{-\infty}^{y} \mathrm{d}x \{ g(x, y_j) g(y, y_l) - g(x, y_l) g(y, y_j) \} \right]_{j,l=1,2,\cdots,N}
\end{aligned} \tag{2.4.58}
$$

となり，パフィアンによる表現を得る．

次に，四元数自己双対エルミート行列の初期条件の場合を考える．このときは，次の形の積分を考えればよい．

$$
\begin{aligned}
I(y_1, \cdots, y_N) &= \int \cdots \int \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_N \frac{\prod_{j<l}^{N/2} |x_j - x_l|^4}{\prod_{j<l}^{N} (x_j - x_l)} \\
&\times \prod_{j=1}^{N/2} \delta(x_j - x_{j+(N/2)}) \det[g(x_j, y_l)]_{j,l=1,2,\cdots,N}.
\end{aligned} \tag{2.4.59}
$$

ここで，

$$\prod_{j<l}^{N/2}|x_j-x_l|^4=\lim_{\substack{x_{j+(N/2)}\to x_j\\ j=1,2,\cdots,N/2}}\frac{(-1)^{N(N-2)/8}\prod_{j<l}^{N}(x_j-x_l)}{\prod_{j=1}^{N/2}(x_j-x_{j+(N/2)})} \tag{2.4.60}$$

の関係に着目すると，

$$\begin{aligned}
&I(y_1,\cdots,y_N)\\
&\propto\int\cdots\int \mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_N\prod_{j=1}^{N/2}\frac{\delta(x_j-x_{j+(N/2)})}{x_j-x_{j+(N/2)}}\det[g(x_j,y_l)]_{j,l=1,2,\cdots,N}\\
&\propto\int\cdots\int \mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{N/2}\det\begin{bmatrix} g(x_j,y_l)\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_j}g(x_j,y_l)\end{bmatrix}_{j=1,2,\cdots,N/2,\ l=1,2,\cdots,N}
\end{aligned} \tag{2.4.61}$$

となる．さらに，行列式の定義を使って，

$$\begin{aligned}
&I(y_1,\cdots,y_N)\\
&\propto\int\cdots\int \mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{N/2}\sum_P(-1)^P\prod_{j=1}^{N/2}g(x_j,y_{P(2j-1)})\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_j}g(x_j,y_{P(2j)})\\
&=\int\cdots\int \mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_{N/2}\sum_P{}'(-1)^P\\
&\times\prod_{j=1}^{N/2}\left[g(x_j,y_{P(2j-1)})\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_j}g(x_j,y_{P(2j)})-g(x_j,y_{P(2j)})\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_j}g(x_j,y_{P(2j-1)})\right]
\end{aligned} \tag{2.4.62}$$

とし，$x_1,\cdots,x_{N/2}$ についての積分を実行すると，

$$
\begin{aligned}
&I(y_1, \cdots, y_N) \\
&\propto \sum_P{}' (-1)^P \prod_{j=1}^{N/2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \left[g(x, y_{P(2j-1)}) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g(x, y_{P(2j)}) \right. \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \left. - g(x, y_{P(2j)}) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g(y, y_{P(2j-1)}) \right] \\
&\propto \mathrm{Pf} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \left\{ g(x, y_j) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g(x, y_l) - g(x, y_l) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} g(x, y_j) \right\} \right]_{j,l=1,2,\cdots,N}
\end{aligned}
\tag{2.4.63}
$$

を得る．

以上で得られた積分 $I(y_1, y_2, \cdots, y_N)$ の パフィアン表示を使えば，関数 $g(x, y)$ を適当に定めることによって初期状態についての積分を実行し，全準位分布関数 p を計算できる．その結果をまとめると，

$$
\begin{aligned}
&p(x_1^1, \cdots, x_N^1; x_1^2, \cdots, x_N^2; \cdots; x_1^M, \cdots, x_N^M) \\
&\propto \prod_{j=1}^{N} \sqrt{w(x_j^M)} \prod_{j>l}^{N} (x_j^M - x_l^M) \mathrm{Pf}[F_{jl}^{11}]_{j,l=1,2,\cdots,N} \\
&\times \prod_{k=1}^{M-1} \det[g_{jl}^{k+1\ k}]_{j,l=1,2,\cdots,N}
\end{aligned}
\tag{2.4.64}
$$

となる $(w(x) = \mathrm{e}^{-x^2})$．ここで，行列 g^{mn} は，

$$
g_{jl}^{mn} = g(x_j^m, x_l^n; \tau_m - \tau_n) \tag{2.4.65}
$$

によって，行列 F^{mn} は，

$$
F_{jl}^{mn} = F(x_j^m, x_l^n; \tau_m, \tau_n) \tag{2.4.66}
$$

によって定義される．関数 $F(x, y; \tau, \tau')$ は，初期条件によって異なる．$H^{(0)}$ が実対称行列のときは，

$$
\begin{aligned}
&F(x,y;\tau,\tau') \\
&= \int \mathrm{d}z' \int^{z'} \mathrm{d}z \sqrt{\frac{u(z)u(z')}{w(z)w(z')}} \{g(x,z;\tau)g(y,z';\tau') - g(y,z;\tau')g(x,z';\tau)\}
\end{aligned}
\tag{2.4.67}
$$

であり，$H^{(0)}$ が四元数自己双対エルミート行列のときは，

$$
\begin{aligned}
&F(x,y;\tau,\tau') \\
&= \int \mathrm{d}z \frac{u(z)}{w(z)} \left\{ g(x,z;\tau)\frac{\partial}{\partial z}g(y,z;\tau') - g(y,z;\tau')\frac{\partial}{\partial z}g(x,z;\tau) \right\}
\end{aligned}
\tag{2.4.68}
$$

である．

N が奇数の場合

続いて，N が奇数の場合を考える．初期条件が実対称行列の場合に，N が偶数のときと同様に進めると，式 (2.4.57) の代わりに，

$$
\begin{aligned}
&I(y_1,\cdots,y_N) \\
&\propto \int\cdots\int \mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_4\cdots\mathrm{d}x_{N-1} \sum_P (-1)^P \delta_{P(N+1),\ N+1} \\
&\times \prod_{j=1}^{(N-1)/2} \int_{-\infty}^{x_{2j}} \mathrm{d}x g(x,y_{P(2j-1)}) g(x_{2j},y_{P(2j)}) \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x g(x,y_{P(N)}) \\
&= \int\cdots\int \mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_4\cdots\mathrm{d}x_{N-1} {\sum_P}' (-1)^P \delta_{P(N+1),\ N+1} \\
&\times \prod_{j=1}^{(N-1)/2} \int_{-\infty}^{x_{2j}} \mathrm{d}x \left[g(x,y_{P(2j-1)}) g(x_{2j},y_{P(2j)}) \right. \\
&\left. - g(x,y_{P(2j)}) g(x_{2j},y_{P(2j-1)}) \right] \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x g(x,y_{P(N)})
\end{aligned}
\tag{2.4.69}
$$

を得る．ここで，P は，$(1,2,\cdots,N+1)$ の置換である．偶数番目の変数についての積分を行い，パフィアンの定義と比較すると，

$$
\begin{aligned}
&I(y_1,\cdots,y_N)\\
&\propto \mathrm{Pf}\left[\begin{array}{cc}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{y}\mathrm{d}x\,\{g(x,y_j)g(y,y_l)-g(x,y_l)g(y,y_j)\}\right]_{j,l=1,2,\cdots,N} & \\
-\left[\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}xg(x,y_l)\right]_{l=1,2,\cdots,N} & \\
\left[\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}xg(x,y_j)\right]_{j=1,2,\cdots,N} & \\
0 &
\end{array}\right]
\end{aligned}
\tag{2.4.70}
$$

になる．このパフィアン表示を使うことにより，N が奇数のときの全準位分布関数 p は容易に計算できて，その結果は，

$$
\begin{aligned}
&p(x_1^1,\cdots,x_N^1;x_1^2,\cdots,x_N^2;\cdots;x_1^M,\cdots,x_N^M)\\
&\propto\prod_{j=1}^{N}\sqrt{w(x_j^M)}\prod_{j>l}^{N}(x_j^M-x_l^M)\mathrm{Pf}\begin{bmatrix}[F_{jl}^{11}]_{j,l=1,2,\cdots,N} & [f_j^1]_{j=1,\cdots,N}\\ -[f_l^1]_{l=1,\cdots,N} & 0\end{bmatrix}\\
&\times\prod_{k=1}^{M-1}\det[g_{jl}^{k+1\ k}]_{j,l=1,2,\cdots,N}
\end{aligned}
\tag{2.4.71}
$$

となる．ここで，行列 F^{mn} は，実対称行列の初期条件に対応して，式 (2.4.66) と (2.4.67) によって与えられる．また，

$$
f_j^m=f(x_j^m;\tau_m) \tag{2.4.72}
$$

であり，$f(x;\tau)$ の関数形は，実対称行列の初期条件に対応して，

$$
f(x;\tau)=\int\sqrt{\frac{u(z)}{w(z)}}g(x,z;\tau)\mathrm{d}z \tag{2.4.73}
$$

となる．

章末問題

[1] $N \times N$ 反対称エルミート行列 H を考える [46, 84]．N が偶数のとき，固有値が正負の対で現れることを示せ．また，N が奇数のとき，固有値のうちの 1 つはゼロであり，残りは正負の対で現れることを示せ．ちなみに，iH は実反対称行列になる．

[2] $N \times N$ 反対称エルミート行列 H のガウス型アンサンブルを，

$$P(H)(\mathrm{d}H) \propto \mathrm{e}^{-\mathrm{Tr}H^2}(\mathrm{d}H)$$

で定義する．測度は，

$$(\mathrm{d}H) = \prod_{j<l}^{N} \mathrm{d}H_{jl}^{I}$$

である．N が偶数のとき，固有値 $x_1, x_2, \cdots, x_N$ の対称化された分布関数は，

$$p(x_1, \cdots, x_N)(\mathrm{d}\mathbf{x}) \propto \sum_P \prod_{j=1}^{N} \mathrm{e}^{-x^2} \prod_{j<l}^{[N/2]} |x_j^2 - x_l^2|^2 \prod_{j=1}^{[N/2]} \delta(x_j - x_{N-j+1})(\mathrm{d}\mathbf{x})$$

になることを示せ．ここで，測度 $(\mathrm{d}\mathbf{x}) = \prod_{j=1}^{N} \mathrm{d}x_j$ であり，$[n]$ は，n を超えない最大の整数を意味する．

[3] 問題 [2] において，N が奇数ならば，固有値の対称化された分布関数は，

$$p(x_1, \cdots, x_N)(\mathrm{d}\mathbf{x}) \propto \sum_P \prod_{j=1}^{N} \mathrm{e}^{-x^2} \delta(x_{[N/2]+1}) \prod_{j<l}^{[N/2]} |x_j^2 - x_l^2|^2 \times \prod_{j=1}^{[N/2]} \delta(x_j - x_{N-j+1})(\mathrm{d}\mathbf{x})$$

になることを示せ．

[4] $N \times N$ 反対称エルミート行列を初期条件とし，$N \times N$ エルミート行列に時間発展するブラウン運動モデルを考えよう．このとき，

$$F(x, y; \tau, \tau') = \int_0^{\infty} \mathrm{d}z \frac{u(z)}{w(z)} \frac{1}{z} \left\{ g(x, -z; \tau) g(y, z; \tau') - g(y, -z; \tau') g(x, z; \tau) \right\}$$

とおき，さらに，N が奇数のときには，

$$f(x;\tau)=\sqrt{\frac{u(0)}{w(0)}}g(x,0;\tau)$$

とすれば，実対称行列の初期条件のときと同じ形の全準位分布関数が得られることを示せ．ただし，ガウス型の初期条件では，$u(z)=\mathrm{e}^{-z^2}$ である．

第 3 章　固有値と固有ベクトルの平均密度

この章では，最も簡単なガウス型アンサンブルについて，固有値と固有ベクトルの平均密度を議論したい．後で述べる他のアンサンブルについても，同様の議論が可能である．固有値については，「Wigner の半円則」[141] が，固有ベクトルについては「Porter-Thomas 分布」[113] が知られている．

3.1　Wigner の半円則

まず最初に，ガウス型直交アンサンブルの性質を数値的に調べてみよう．実対称行列の各要素をガウス分布させることにより，容易にガウス型直交アンサンブルを生成することができる．

実対称行列の独立要素として，対角要素およびそれらより上にある非対角要素を選ぶことができる．平均ゼロで分散 1/2 のガウス型の乱数を独立要素とする 1000×1000 の実対称行列を考えよう．これを数値対角化して，固有値を計算し，固有値密度をグラフ表示する．厳密には，ガウス型直交アンサンブルにおいては，対角要素の分散は非対角要素の分散の 2 倍になるが，この違いは結果に影響しない．結果を図 3.1 に示すが，半円形の密度になるこ

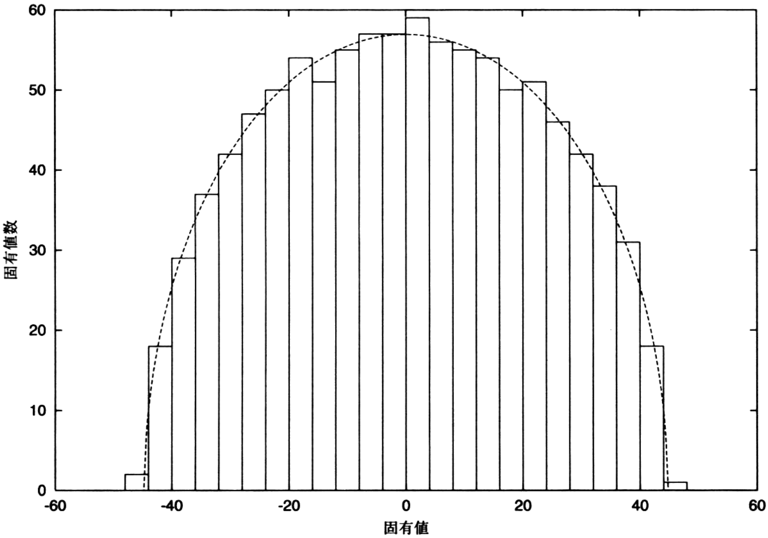


図 3.1 平均ゼロで分散 1/2 のガウス型乱数を独立要素にもつ 1000×1000 実対称行列の固有値密度．曲線は Winger 半円則 (3.1.17) による理論値．

とがわかる．この結果は，1 つのランダム行列についてのものであって，多くのランダム行列を生成してその固有値密度の平均をとるようなことは行っていない．

次に，たとえば，平均ゼロで分散 1/2 の一様乱数を独立要素とする 1000×1000 の実対称行列を数値対角化して，固有値密度を計算したとしよう．実際にやってみればわかるが，このときも，まったく同じ半円型の密度になる．すなわち，要素の分散が同じであれば，行列の次数が大きいときには同じ形の固有値密度が得られる．これを Wigner の半円則と呼ぶ [141, 142]．ユニタリアンサンブルとシンプレクティックアンサンブルについても同様の結果が得られる．

アンサンブルに含まれるすべてのランダム行列についての平均を，アンサンブル平均と呼ぶ．アンサンブル平均は，確率分布関数によって決まる重み

つきの平均である．Wigner は，

(1) 行列要素が独立に分布し，

(2) 平均がゼロで同じ分散をもち，

(3) 高次のモーメントが有限である場合に，

固有値密度のアンサンブル平均に対して半円則を証明した [141]．その後の研究により，条件 (3) は不要であることがわかっている [54, 110]．

Wigner の証明は，アンサンブルに含まれるすべてのランダム行列の固有値密度の平均が，半円形になることを意味する．ところが，実際には，数値計算によって示したように，ただ 1 つのランダム行列を生成しただけで，半円則を見ることができる．

このように，アンサンブル平均のもつ性質が，1 つのアンサンブル要素によって満たされていることを，自己平均性と呼ぶ．自己平均性を含むより一般的な半円則については，Wigner 以後も研究が進んでいる．本書ではそこまで議論しないが，参考文献として [54, 110] を挙げておく．今後は，固有値密度のアンサンブル平均のことを，たんに固有値密度と呼ぶことにする．

ガウス型アンサンブルの固有値密度が半円則を満たすことを，Hilbert 変換を用いて示す方法を紹介しよう [65]．ガウス型アンサンブルの確率分布関数は，前章の結果より，

$$p(x_1, \cdots, x_N) \propto \mathrm{e}^{-\beta W(x_1, \cdots, x_N)}, \quad -\infty < x_1, \cdots, x_N < \infty \tag{3.1.1}$$

の形に書ける．ただし，

$$W(x_1, \cdots, x_N) = \sum_{j=1}^{N} V(x_j) - \sum_{j<l}^{N} \ln |x_j - x_l| \tag{3.1.2}$$

である．直交アンサンブル，ユニタリアンサンブル，シンプレクティックアンサンブルは，それぞれ $\beta = 1, 2, 4$ に対応する．$V(x)$ は，ガウス型アンサンブルにおいては，$x^2/2$ になる．

ガウス型アンサンブルの（平均）固有値密度 $\rho(x)$ は，x の関数

$$\sum_{j=1}^{N}\delta(x-x_j) \tag{3.1.3}$$

のアンサンブル平均であり，

$$\rho(x)=\frac{\displaystyle\int\sum_{j=1}^{N}\delta(x-x_j)\mathrm{e}^{-\beta W(x_1,\cdots,x_N)}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_N}{\displaystyle\int\mathrm{e}^{-\beta W(x_1,\cdots,x_N)}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_N} \tag{3.1.4}$$

のように書き表される．$\rho(x)$ は，規格化条件

$$\int\rho(x)\mathrm{d}x=N \tag{3.1.5}$$

を満たすことに注意しよう．

ここで，関数 $V(x)$ の形に対して，

$$V(\sqrt{N}\lambda)=Nv(\lambda) \tag{3.1.6}$$

を仮定しよう．ただし，λ の関数 $v(\lambda)$ は，N に依存しないとする．ガウス型のときには，この仮定が満たされている．スケーリング（大きさの程度を変えること）を施した固有値密度 $\bar{\rho}(\lambda)$ を，

$$\bar{\rho}(\lambda)=(1/\sqrt{N})\rho(\sqrt{N}\lambda) \tag{3.1.7}$$

によって定義すると，これは，

$$\bar{\rho}(\lambda)=\frac{1}{N}\frac{\displaystyle\int\sum_{j=1}^{N}\delta(\lambda-\lambda_j)\mathrm{e}^{-N^2\beta\bar{W}(\lambda_1,\cdots,\lambda_N)}\mathrm{d}\lambda_1\cdots\mathrm{d}\lambda_N}{\displaystyle\int\mathrm{e}^{-N^2\beta\bar{W}(\lambda_1,\cdots,\lambda_N)}\mathrm{d}\lambda_1\cdots\mathrm{d}\lambda_N} \tag{3.1.8}$$

を満たす．ただし，関数 $\bar{W}(\lambda_1, \cdots, \lambda_N)$ は，

$$\bar{W}(\lambda_1, \cdots, \lambda_N) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} v(\lambda_j) - \frac{1}{N^2}\sum_{j<l}^{N} \ln|\lambda_j - \lambda_l| \tag{3.1.9}$$

である．また，$\bar{\rho}(\lambda)$ の規格化条件は，

$$\int \bar{\rho}(\lambda)\mathrm{d}\lambda = 1 \tag{3.1.10}$$

によって与えられる．

ここで，積分の中に，$\exp(-N^2\beta\bar{W})$ の因子が入っていることに着目しよう．関数 $\bar{W}$ は，極限 $N \to \infty$ をとったとき，発散したりゼロになったりせず，1 の程度の大きさを保つ．このような形の積分では，$N \to \infty$ の極限において，$\bar{W}$ の変分 $\delta\bar{W}$ がゼロになる点（停留点）周辺からの寄与が，他の積分範囲からの寄与を圧倒する [21]．したがって，$\bar{\rho}(\lambda)$ の $N \to \infty$ での漸近形は，

$$\bar{\rho}(\lambda) \sim \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \delta(\lambda - \lambda_j) \tag{3.1.11}$$

によって与えられる．ただし，$\lambda_1, \cdots, \lambda_N$ は，停留点の条件 $(\delta\bar{W} = 0)$，すなわち，

$$\frac{1}{N}\sum_{\substack{l=1 \\ l\neq j}}^{N} \frac{1}{\lambda_j - \lambda_l} = v'(\lambda_j) \tag{3.1.12}$$

を満たすように定められる．ここで，λ_j を $\lambda(j/N)$ で置き換えると，Riemann 積分の定義から，停留点の条件は，

$$P\int_0^1 \mathrm{d}y \frac{1}{\lambda(x) - \lambda(y)} = v'(\lambda(x)) \tag{3.1.13}$$

と書き直せる．記号 P は，Cauchy の主値積分を意味し，

$$P\int_a^b \mathrm{d}y = \lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_a^{x-\epsilon} + \int_{x+\epsilon}^b\right)\mathrm{d}y \tag{3.1.14}$$

のように定義される．

さらに，任意の関数 $f(x)$ に対して，$N \to \infty$ では，

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x &= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} f\left(\frac{j}{N}\right) \\ &= \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(\lambda(x)-\lambda_j)\mathrm{d}\lambda \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\delta(\lambda(x)-\lambda_j)\mathrm{d}\lambda \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x(\lambda))\bar{\rho}(\lambda)\mathrm{d}\lambda \end{aligned} \tag{3.1.15}$$

が成り立つので，$\bar{\rho}(\lambda)$ を使うことによって，x についての積分を λ についての積分に書き直すことができる．その結果，停留点の条件は，

$$P\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\mu\frac{\bar{\rho}(\mu)}{\lambda-\mu} = v'(\lambda) \tag{3.1.16}$$

となり，これによって $\bar{\rho}(\lambda)$ を決められる．

条件式 (3.1.16) の左辺は，Hilbert 変換として知られる積分変換になっている．いま，$\bar{\rho}(\lambda)$ が，

$$\bar{\rho}(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\sqrt{2-\lambda^2}, & |\lambda| < \sqrt{2}, \\ 0, & |\lambda| > \sqrt{2} \end{cases} \tag{3.1.17}$$

であるとしよう．これは，規格化条件 (3.1.10) を満たすことがすぐにわかる．このとき，Hilbert 変換の公式により [42]，(3.1.16) の左辺は，$\bar{\rho}(\lambda) > 0$ が満たされる範囲 $(-\sqrt{2} < \lambda < \sqrt{2})$ において λ に等しくなる．すなわち，ガウス型アンサンブル $(v(\lambda) = \lambda^2/2)$ に対する停留点を与える．確かに，この $\bar{\rho}(\lambda)$ は，半円形の固有値密度であり，Wigner の半円則を満たしている．$N \to \infty$ において，固有値密度の β への依存性はないことに注意してもらいたい．

ここでの議論は，ガウス型でない $v(\lambda)$ へも，対応する Hilbert 変換がわかっていれば拡張できる [15, 16]．たとえば，より一般的な Hilbert 変換の公式 $(m, n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$[42]

$$P\int_a^b \mathrm{d}\mu \frac{(\mu-a)^{m-(1/2)}(b-\mu)^{n-(1/2)}}{\lambda-\mu}$$
$$= (b-a)^{m+n-1}(m-(1/2))! \sum_{j=0}^{m+n-1} \frac{(n-j-(3/2))!}{(m+n-j-1)!}\left(\frac{b-x}{b-a}\right)^j,$$
$$a < x < b \tag{3.1.18}$$

を使い，右辺を $v'(\lambda)$ とおく（階乗 $x!$ は，x が自然数のときには $x! = x(x-1)\cdots 1$ であるが，一般には，ガンマ関数

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t \tag{3.1.19}$$

を使って，$x! = \Gamma(x+1)$ と定義する）．そうすれば，$(\lambda-a)^{m-(1/2)}(b-\lambda)^{n-(1/2)}$ に比例する，より一般的な固有値密度が得られる．$m = n = 1$ かつ $a = -b$ の場合が，ガウス型アンサンブルに対応する．行列要素を変数とすると，これらの拡張アンサンブルは，

$$P(H)(\mathrm{d}H) \propto \mathrm{e}^{-\beta V(H)}(\mathrm{d}H) = \exp\left\{-N\beta \mathrm{Tr}\ v\left(\frac{H}{\sqrt{N}}\right)\right\}(\mathrm{d}H) \tag{3.1.20}$$

と書くことができる．

このようにして導かれた，より一般的な $V(H)$ をもつアンサンブルは，量子場の理論における行列模型として知られ [28]，ガウス型アンサンブルと同様に，直交変換（あるいは，ユニタリ変換，シンプレクティック変換）の下で不変である．しかし，ガウス型の場合を除いては，異なる行列要素の確率分布は互いに独立ではない．行列模型の規格化定数は，非線形微分方程式のソリトン解（τ 関数）を与えることがあり，可積分系との関係が活発に研究されている [73]．

3.2　Porter-Thomas 分布

第 2 章で述べたように，ガウス型直交アンサンブルは直交変換の下で不変であり，したがって，固有ベクトルは直交行列の対称性を満たす空間内で一様分布する．このような，局在のない一様分布を特徴づけるのが，Porter-Thomas 分布である [113].

平均ゼロで分散 1/2 のガウス型乱数を独立要素とする 1000×1000 実対称行列を数値対角化して，固有ベクトルを計算する．1000×1000 個の固有ベクトル成分の密度をグラフ表示すると図 3.2 のようになり，これから示すように，ガウス分布になっているのがわかる．これが，Porter-Thomas 分布である．

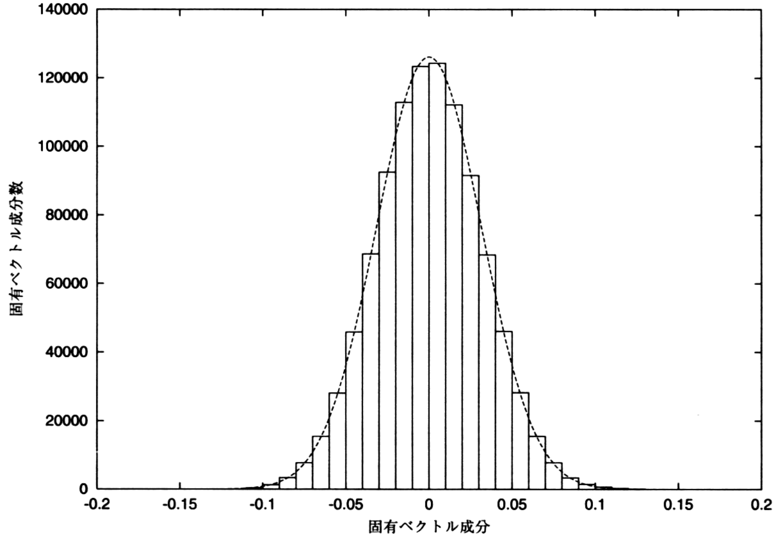


図 3.2　平均ゼロで分散 1/2 のガウス型乱数を独立要素にもつ 1000×1000 実対称行列の固有ベクトル成分の密度．曲線は Porter-Thomas 分布 (3.2.18) による理論値.

ガウス型直交アンサンブルの固有ベクトルの分布関数は，

$$P(O)\prod_{j<l}^{N}[O^{\mathrm{T}}\mathrm{d}O]_{jl} \propto \prod_{j<l}^{N}[O^{\mathrm{T}}\mathrm{d}O]_{jl} \tag{3.2.1}$$

と書ける．これは，独立変数として，$[O^{\mathrm{T}}\mathrm{d}O]_{jl}$ を選んだ形に書かれている．ここでは，変数変換により，$\mathrm{d}O_{jl}$ を独立変数とする形に変えたい．そのためには，O が直交行列であることによる拘束条件

$$[O^{\mathrm{T}}O]_{jl} = \delta_{jl} \tag{3.2.2}$$

に着目する．この拘束条件を，デルタ関数を使ってあからさまに固有ベクトルの分布関数の中に入れることを考えよう．まず，

$$\int \delta\left([O^{\mathrm{T}}O]_{jl} - \delta_{jl}\right)\mathrm{d}[O^{\mathrm{T}}O]_{jl} = 1 \tag{3.2.3}$$

に着目すると，固有ベクトルの分布関数を，

$$\begin{aligned} &P(O)\prod_{j<l}^{N}[O^{\mathrm{T}}\mathrm{d}O]_{jl}\prod_{j\le l}^{N}\mathrm{d}[O^{\mathrm{T}}O]_{jl} \\ &\propto \prod_{j\le l}^{N}\delta\left([O^{\mathrm{T}}O]_{jl} - \delta_{jl}\right)\prod_{j<l}^{N}[O^{\mathrm{T}}\mathrm{d}O]_{jl}\prod_{j\le l}^{N}\mathrm{d}[O^{\mathrm{T}}O]_{jl} \end{aligned} \tag{3.2.4}$$

とみなすことができる．積分変数の数が，$N(N-1)/2$ 個から拘束条件の数 $N(N+1)/2$ 個の分増えて，N^2 個になっている．ところが，

$$\begin{aligned} &[O^{\mathrm{T}}\mathrm{d}O]_{jl} \wedge \mathrm{d}[O^{\mathrm{T}}O]_{jl} \\ &= [O^{\mathrm{T}}\mathrm{d}O]_{jl} \wedge [\mathrm{d}O^{\mathrm{T}}O + O^{\mathrm{T}}\mathrm{d}O]_{jl} \\ &= [O^{\mathrm{T}}\mathrm{d}O]_{jl} \wedge [\mathrm{d}O^{\mathrm{T}}O]_{jl} \\ &= [O^{\mathrm{T}}\mathrm{d}O]_{jl} \wedge [O^{\mathrm{T}}\mathrm{d}O]_{lj} \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

により，積分変数の変換を行うと，

$$P(O)\prod_{j=1}^{N}\prod_{l=1}^{N}[O^{\mathrm{T}}\mathrm{d}O]_{jl} \propto \left(\prod_{j\le l}^{N}\delta\left([O^{\mathrm{T}}O]_{jl}-\delta_{jl}\right)\right)\prod_{j=1}^{N}\prod_{l=1}^{N}[O^{\mathrm{T}}\mathrm{d}O]_{jl} \tag{3.2.6}$$

を得る．微小体積 $\prod_{j,l=1}^{N}[O^{\mathrm{T}}\mathrm{d}O]_{jl}$ から微小体積 $\prod_{j,l=1}^{N}\mathrm{d}O_{jl}$ へのヤコビアンの絶対値は，O が直交行列ならば $|\det O|=1$ であることから，1 になる．したがって，固有ベクトルの分布関数は，結局，

$$P(O)\prod_{j=1}^{N}\prod_{l=1}^{N}[O^{\mathrm{T}}\mathrm{d}O]_{jl} \propto \left(\prod_{j\le l}^{N}\delta\left([O^{\mathrm{T}}O]_{jl}-\delta_{jl}\right)\right)\prod_{j=1}^{N}\prod_{l=1}^{N}\mathrm{d}O_{jl} \tag{3.2.7}$$

となる．

ランダム行列の固有ベクトルは，O の各列によって与えられる．次に，O の第 1 列によって与えられる 1 つの固有ベクトルの分布関数を導出しよう．そのためには，全固有ベクトルの分布関数から第 2 列以降の変数 O_{jl} $(l=2,3,\cdots,N)$ を積分する必要がある．第 N 列から順に列番号の小さい方へ積分していくとき，各列に関係した因子を積分した結果，残りの列に依存しない因子が生じることを証明できる．そのためには，第 n 列を積分するときに必要な

$$I_n=\int\prod_{j=1}^{n}\delta\left([O^{\mathrm{T}}O]_{jn}-\delta_{jn}\right)\prod_{m=1}^{N}\mathrm{d}O_{mn} \tag{3.2.8}$$

が，残りの列に依存しないことを示せばよい．まず，デルタ関数のところに，

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-ikx}\mathrm{d}k \tag{3.2.9}$$

の関係を代入すると，

$$\begin{aligned}I_n&=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\prod_{j=1}^{n}\mathrm{d}k_j\mathrm{e}^{-ik_n}\\&\times\prod_{m=1}^{N}\int\mathrm{d}O_{mn}\exp\left[-i\sum_{j=1}^{n-1}k_jO_{mj}O_{mn}+ik_nO_{mn}^2\right]\end{aligned} \tag{3.2.10}$$

の表現を得る．$k_n \mapsto k_n^+ = k_n + i\varepsilon$ と置き換えて ($\varepsilon > 0$)，後で $\varepsilon \to 0$ の極限をとることにし，O_{mn} に対するガウス積分を計算すると，

$$I_n = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{(2\pi)^n} \int \prod_{j=1}^{n} \mathrm{d}k_j \left(\frac{\pi}{\varepsilon - ik_n} \right)^{N/2} \mathrm{e}^{-ik_n^+} \times \exp\left[-\frac{1}{4(\varepsilon - ik_n)} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{l=1}^{n-1} k_j k_l \sum_{m=1}^{N} O_{mj} O_{ml} \right] \tag{3.2.11}$$

になる．ここで，まだ積分されていない列の正規直交性

$$\sum_{m=1}^{N} O_{mj} O_{ml} = \delta_{jl}, \quad j, l = 1, 2, \cdots, n-1 \tag{3.2.12}$$

を使うことができるので，これらの列への依存性は消えて，

$$I_n = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{2} \pi^{(N-n-1)/2} \int_{-\infty}^{\infty} (\varepsilon - is)^{(n-N-1)/2} \mathrm{e}^{-is} \mathrm{d}s \tag{3.2.13}$$

を得る．最後に残った積分を計算し，$\varepsilon \to 0$ の極限をとると，

$$I_n = \frac{\pi^{(N-n+1)/2}}{\Gamma((N-n+1)/2)} \tag{3.2.14}$$

と結論される．したがって，この積分 I_n を $n = N, N-1, \cdots, 2$ について順番に使うことにより，第 1 列 $x_j = O_{j1}$ の分布関数

$$P_N(x_1, \cdots, x_N) \prod_{j=1}^{N} \mathrm{d}x_j = (1/I_1) \delta \left(\sum_{m=1}^{N} x_m^2 - 1 \right) \prod_{j=1}^{N} \mathrm{d}x_j \tag{3.2.15}$$

が導かれる．全部の変数について積分したときに 1 になるように，規格化定数も定めた．

この第 1 列の分布関数については，k 個の変数だけ残して残りの変数について積分することもできる．すなわち，

$$P_k(x_1, \cdots, x_k) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x_{k+1} \cdots \mathrm{d}x_N P_N(x_1, \cdots, x_N) = \pi^{-k/2} \frac{\Gamma(N/2)}{\Gamma((N-k)/2)} \left(1 - \sum_{m=1}^{k} x_m^2 \right)^{(N-k-2)/2} \tag{3.2.16}$$

である．とくに，$k=1$ の場合を考え，$\xi=\sqrt{N}x_1$ とおき，Stirling の公式 [21]

$$\Gamma(z)\sim\sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-z}z^{z-(1/2)},\quad |z|\to\infty \tag{3.2.17}$$

を使って $N\to\infty$ の極限をとると，ガウス分布

$$P(\xi)\mathrm{d}\xi=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\xi^2/2}\mathrm{d}\xi \tag{3.2.18}$$

を得る．これが，解析的に導かれた Porter-Thomas 分布である．前に数値的に計算した結果は，1 つのアンサンブル要素に対するものであるのに対し，いま解析的に得た結果は，アンサンブル平均によって得られたことに注意すべきである．すなわち，固有値密度の場合と同様に，固有ベクトル分布に対しても，自己平均性が成立している．

ガウス型ユニタリアンサンブルとガウス型シンプレクティックアンサンブルの場合にも，まったく同様にして，第 1 列 $x_j=O_{j1}$ の分布関数を導くことができる．ユニタリアンサンブルの場合には，

$$P_N(x_1,\cdots,x_N)\prod_{j=1}^{N}\mathrm{d}x_j^R\mathrm{d}x_j^I\propto\delta\left(\sum_{m=1}^{N}|x_m|^2-1\right)\prod_{j=1}^{N}\mathrm{d}x_j^R\mathrm{d}x_j^I \tag{3.2.19}$$

が得られ，一方，シンプレクティックアンサンブルの場合には，

$$P_N(x_1,\cdots,x_N)\prod_{j=1}^{N}\prod_{l=1}^{4}\mathrm{d}x_j^{(l)}\propto\delta\left(\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{4}(x_m^{(n)})^2-1\right)\prod_{j=1}^{N}\prod_{l=1}^{4}\mathrm{d}x_j^{(l)} \tag{3.2.20}$$

が得られる．シンプレクティックアンサンブルの固有ベクトルの成分は，実四元数であったことに注意せよ．k 個の変数だけ残して残りの変数について積分することも，直交アンサンブルのときと同じ積分公式を用いて容易に実行できる．

このように，1 つの固有ベクトルだけに着目した場合には，その分布について詳細な情報を得ることができる．多くの固有ベクトルの間の相関については，参考文献 [84, 115] を参照してもらいたい．

この節で導いたガウス型アンサンブルの固有ベクトル分布に関する結果は，ガウス型アンサンブルだけでなく，直交（ユニタリ，シンプレクティック）変換の下で不変なアンサンブルに対して，いつも有効である．

第4章 超行列の方法

本章では，Efetov によって導入された超行列の方法により，行列要素が独立に分布しているユニタリアンサンブルについて，Wigner の半円則を導出する．各行列要素の分布は，必ずしもガウス分布でない場合も含めて扱う．Wigner の半円則のより厳密で一般的な議論については，V.L. Girko の本 [54] を参照してもらいたい．

超行列の方法は，場の理論的な方法のうちの 1 つに分類され，応用範囲が広く，とくにメソスコピック系の物理学において，微視的な物理法則とランダム行列理論の間の橋渡しの役割を果たしている [39, 40, 55, 137, 147]．場の理論的な方法としては，他に，レプリカ法 [74, 139]，Keldysh 法 [3, 75, 118] が知られており，これらは，超行列の方法より，さらに一般的な物理系の解析に使うことができる．これら場の理論的な方法の問題点は，固有値相関の計算が難しいことである．固有値相関には，第 6 章で述べるように，応用において固有値密度以上の重要性がある．超行列の方法による固有値相関の解析は，場の理論的な方法の中では，比較的進歩している．実際，ガウス型アンサンブルについては，3 つのアンサンブルすべてに対して，2 固有値間の相関関数の計算が厳密になされている．

場の理論的方法の問題点は，将来さらに克服されていくものと期待されるが，本書においては，固有値相関の計算は，第 6 章以下で別の方法によって行うことにする．この章では，場の理論的な方法の基本的なアイディアを紹介することを目的に，固有値密度の計算のみを行う．

4.1 超行列

超行列の方法においては，グラスマン数が用いられる．グラスマン数は，反交換する数として定義される．つまり，グラスマン数 η_1, η_2 があるとき，

$$\eta_1 \eta_2 = -\eta_2 \eta_1 \tag{4.1.1}$$

が成立する．この結果，同じグラスマン数をかけるとゼロになる $(\eta^2 = 0)$．グラスマン数 η に対して，共役グラスマン数 η^* を考えることができる．共役グラスマン数は，関係

$$(\eta_1 \eta_2)^* = \eta_1^* \eta_2^* \tag{4.1.2}$$

と

$$(\eta^*)^* = -\eta \tag{4.1.3}$$

を満たす．とくに，後の方の関係は，複素数の場合と違うので注意してほしい．

次に，超行列を導入する．超行列は，

$$A = \begin{bmatrix} a & \alpha \\ \beta & b \end{bmatrix} \tag{4.1.4}$$

の形の行列である．ここで，a, b は，普通の（複素数を要素にもつ）$N \times N$ 行列，α, β は，グラスマン数を要素にもつ $N \times N$ 行列である．明らかに，超行列の和や積は，超行列になる．

超行列のトレース（超トレース）STr を，

$$\mathrm{STr}\, A = \mathrm{Tr}\, a - \mathrm{Tr}\, b \tag{4.1.5}$$

で定義する．また超行列の行列式（超行列式）Sdet を，

$$\mathrm{Sdet}\ A = \frac{\det(a - \alpha b^{-1}\beta)}{\det\ b} \tag{4.1.6}$$

で定義する．このとき，超行列 A に対して，

$$\mathrm{STr}\ln A = \ln\mathrm{Sdet}\ A \tag{4.1.7}$$

を示すことができる [39, 40]．これは，超トレースを普通のトレース，超行列式を普通の行列式に置き換えた場合に，普通の行列 A に対して成り立つことがよく知られている関係式である．

超ベクトルは，

$$\Phi = \begin{pmatrix} z \\ \eta \end{pmatrix} \tag{4.1.8}$$

の形のベクトルである．z は複素数の N 次ベクトル，η はグラスマン数の N 次ベクトルである．

超行列の転置行列は，普通の転置と異なり，

$$A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a & \alpha \\ \beta & b \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a^{\mathrm{T}} & \beta^{\mathrm{T}} \\ -\alpha^{\mathrm{T}} & b^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \tag{4.1.9}$$

のように定義される．このとき，転置を 2 回繰り返しても元に戻らないことがすぐにわかる．その代わりに，

$$(A\Phi)^{\mathrm{T}} = \Phi^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}} \tag{4.1.10}$$

が成り立つ（ベクトルの転置は普通の転置と同じように定義している）．

超行列 A の共役行列 A^* は，A の各要素の共役を要素とする超行列である．さらに，エルミート共役 $A^\dagger$ を，$A^\dagger = (A^*)^{\mathrm{T}}$ で定義する．エルミート共役を 2 回とると元の行列になる．$A^\dagger = A$ のとき，超行列 A はエルミート行列である．

次に，多変数ガウス型積分を考える．$N \times N$ 複素エルミート行列 A_0 の固有値がすべて正であれば，多変数ガウス型積分

$$\frac{1}{\det A_0} = \int \cdots \int \prod_{j=1}^{N} \left(\frac{\mathrm{d}z_j \mathrm{d}z_j^*}{2\pi i} \right) \mathrm{e}^{-z^\dagger A_0 z} \tag{4.1.11}$$

が成立することは，よく知られている [145]．ここで，$z = (z_1, z_2, \cdots, z_N)^{\mathrm{T}}$ は，複素数の要素をもつベクトルである．解析接続によって，A_0 がエルミート行列でない場合へ拡張することも可能である．

一方，グラスマン数の要素をもつベクトル $\eta = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_N)^{\mathrm{T}}$ に対して，類似のガウス型積分を考えることができる．グラスマン数についての積分を，

$$\int \mathrm{d}\eta\eta = \int \mathrm{d}\eta^* \eta^* = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \tag{4.1.12}$$

と

$$\int \mathrm{d}\eta = \int \mathrm{d}\eta^* = 0 \tag{4.1.13}$$

で定義すると，$N \times N$ 複素行列 A_1 に対して，

$$\det A_1 = \int \cdots \int \prod_{j=1}^{N} (2\pi \mathrm{d}\eta_j^* \mathrm{d}\eta_j) \mathrm{e}^{-\eta^\dagger A_1 \eta} \tag{4.1.14}$$

が証明できる [145]．

ここで，グラスマン数の部分がすべてゼロの超行列

$$A = \begin{bmatrix} A_0 & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} \tag{4.1.15}$$

を考えると，超行列式の定義より，

$$\frac{1}{\mathrm{Sdet}\ A} = \int \cdots \int \prod_{j=1}^{N} (i \mathrm{d}z_j \mathrm{d}z_j^*) \prod_{j=1}^{N} (\mathrm{d}\eta_j \mathrm{d}\eta_j^*) \mathrm{e}^{-\Phi^\dagger A \Phi} \tag{4.1.16}$$

となる．Φ は超ベクトル $\Phi = (z, \eta)^{\mathrm{T}}$ である．このように，超行列を用いることによって，行列式を別の行列式で割ったものをガウス型積分に書くこと

が可能になる．さらに，(4.1.16) は，グラスマン数の部分がゼロでない超行列 A についても，

$$\Phi^\dagger A\Phi = (z^\dagger, \eta^\dagger)\begin{bmatrix} a & \alpha \\ \beta & b \end{bmatrix}\begin{pmatrix} z \\ \eta \end{pmatrix}$$
$$= (\eta^\dagger + z^\dagger \alpha b^{-1}) b(\eta + b^{-1}\beta z) + z^\dagger(a - \alpha b^{-1}\beta)z \quad (4.1.17)$$

に着目すれば，一般に成り立つことがわかる．

4.2 母関数

いま，$N \times N$ エルミート行列 H の固有値 $x_1, x_2, \cdots, x_N$ の分布を考えているとしよう．このとき，固有値密度は，

$$\rho(x) = \sum_{n=1}^{N} \delta(x - x_n) = \mathrm{Tr}\ \delta(x - H) \quad (4.2.1)$$

で与えられる．$\delta(x)$ は Dirac のデルタ関数である．デルタ関数の超関数表示

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi i}\left[\frac{1}{x - i\epsilon} - \frac{1}{x + i\epsilon}\right], \quad \epsilon \to 0^+ \quad (4.2.2)$$

を使って，固有値密度の表示を書き換えよう．グリーン関数を，

$$G^{\pm}(x) = \mathrm{Tr}\ \frac{1}{x - H \pm i\epsilon} \quad （複号同順） \quad (4.2.3)$$

のように定義すると，

$$\rho(x) = \frac{i}{2\pi}[G^+(x) - G^-(x)] \quad (4.2.4)$$
$$= -\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\ G^+(x)$$

となる（Im は虚部を表す）．$G^+(x)$ は遅延グリーン関数，$G^-(x)$ は先進グリーン関数と呼ばれる．したがって，固有値密度の平均 $\overline{\rho(x)}$ を評価するた

めには，遅延グリーン関数の平均 $\overline{G^+(x)}$ の虚部がわかればよいということになる．

ここで，遅延グリーン関数の平均を評価するために，母関数を導入しよう．母関数 $Z(J)$ は，

$$Z(J) = \int (\mathrm{d}\Phi) \mathrm{e}^{i\Phi^\dagger (D+\mathcal{K})\Phi}, \quad (\mathrm{d}\Phi) = \prod_{j=1}^{N} (i\mathrm{d}z_j \mathrm{d}z_j^*) \prod_{j=1}^{N} (\mathrm{d}\eta_j \mathrm{d}\eta_j^*) \tag{4.2.5}$$

によって定義される．ここで，D と $\mathcal{K}$ は，$2N \times 2N$ 超行列

$$D = \begin{bmatrix} x - H + i\epsilon & 0 \\ 0 & x - H + i\epsilon \end{bmatrix} \tag{4.2.6}$$

および

$$\mathcal{K} = \begin{bmatrix} JI & 0 \\ 0 & -JI \end{bmatrix} \tag{4.2.7}$$

である（I は，$N \times N$ 単位行列）．Z の定義より，

$$\begin{aligned} Z(J) &= \frac{1}{\mathrm{Sdet}\ (D + \mathcal{K})} \\ &= \exp\left\{-\mathrm{STr} \ln(D + \mathcal{K})\right\} \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

となる．Sdet $D = 1$ だから，$Z(0) = 1$ である．したがって，$Z(J)$ を J で微分した後，J をゼロにおくと，

$$\left.\frac{\partial Z(J)}{\partial J}\right|_{J=0} = -2\mathrm{Tr}\ \frac{1}{x - H + i\epsilon} = -2G^+(x) \tag{4.2.9}$$

が得られる．すなわち，遅延グリーン関数の平均 $\overline{G^+(x)}$ を求めるためには，母関数の平均 $\overline{Z(J)}$ がわかればよいのである．性質 $Z(0) = 1$ は非常に重要であり，もしこの性質がないと，母関数の対数の平均 $\overline{\ln Z(J)}$ を計算しなければならなくなる．

母関数の中で，ランダム行列に依存している因子は $\exp(-i\Phi^\dagger H \Phi)$ だから，この部分の平均を計算すればよい．

$$\exp(-i\Phi^\dagger H \Phi) = \exp\{-i\mathrm{Tr}\ H(zz^\dagger - \eta\eta^\dagger)\} \tag{4.2.10}$$

であるから，ガウス型ユニタリアンサンブルにおいては，C を規格化定数として，その平均は，

$$
\begin{aligned}
& C\int(\mathrm{d}H)\exp\left\{-\frac{N}{2r^2}\mathrm{Tr}\ H^2 - i\mathrm{Tr}\ H(zz^\dagger - \eta\eta^\dagger)\right\} \\
&= \exp\left\{-\frac{r^2}{2N}\mathrm{Tr}\ (zz^\dagger - \eta\eta^\dagger)^2\right\} \\
&= \exp\left\{-\frac{r^2}{2N}\mathrm{STr}\ S^2\right\}
\end{aligned}
\tag{4.2.11}
$$

である．ここで，$H \to (\sqrt{N/2}r)H$ のスケーリングを行い，行列要素の分布の幅を決める有限パラメータ $r > 0$ を導入した．固有値分布の幅が，$\sqrt{N}$ のオーダーの広がりをもつので，このようなスケーリングを導入することが，有限幅の固有値密度を得るために必要になる．一方，S は 2×2 超行列

$$
S = \begin{bmatrix} z^\dagger z & \eta^\dagger z \\ z^\dagger \eta & -\eta^\dagger \eta \end{bmatrix} \tag{4.2.12}
$$

である．行列 $zz^\dagger - \eta\eta^\dagger$ が H と同じエルミート行列になることに，注意してもらいたい．直交アンサンブルの場合には，別の扱いが必要である．なぜなら，H が実対称行列のときには，H と $zz^\dagger - \eta\eta^\dagger$ の対称性が異なってしまうからである．対称性が異なると，H についての積分を，同様には実行できなくなる．さて，残りの因子についても S を使った表示に書き直すと，

$$
\overline{Z(J)} = \int(\mathrm{d}\Phi)\exp\left\{-\frac{r^2}{2N}\mathrm{STr}\ S^2 + i\mathrm{STr}\ (x + i\epsilon + K)S\right\} \tag{4.2.13}
$$

を得る．K は，2×2 超行列

$$
K = \begin{bmatrix} J & 0 \\ 0 & -J \end{bmatrix} \tag{4.2.14}
$$

である．この段階で，$2N \times 2N$ 超行列は消滅し，その代わりに，2×2 超行列が現れている．

次に，2×2 超行列 σ を，

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & i\sigma_{22} \end{bmatrix}, \quad \sigma_{11}^* = \sigma_{11}, \quad \sigma_{22} = \sigma_{22}^*, \quad \sigma_{21}^* = \sigma_{12} \tag{4.2.15}$$

のように導入する．そして，

$$c\int (\mathrm{d}\sigma)\exp\left\{-\frac{N}{2}\mathrm{STr}\ \sigma^2\right\} = 1, \quad (\mathrm{d}\sigma) = \mathrm{d}\sigma_{11}\mathrm{d}\sigma_{22}\mathrm{d}\sigma_{12}\mathrm{d}\sigma_{12}^* \tag{4.2.16}$$

となるように規格化定数 c を定めると，

$$\begin{aligned}\overline{Z(J)} &= c\int (\mathrm{d}\Phi)(\mathrm{d}\sigma)\exp\left\{-\frac{N}{2}\mathrm{STr}\left(\sigma + i\frac{r}{N}S\right)^2\right.\\ &\qquad \left.-\frac{r^2}{2N}\mathrm{STr}\ S^2 + i\mathrm{STr}\ (x + i\epsilon + K)S\right\}\\ &= c\int (\mathrm{d}\Phi)(\mathrm{d}\sigma)\exp\left\{-\frac{N}{2}\mathrm{STr}\ \sigma^2 + i\mathrm{STr}\ (x - r\sigma + i\epsilon + K)S\right\}\end{aligned} \tag{4.2.17}$$

となる．S がエルミート行列なので，前と同様に，σ もまたエルミート行列にすべきであるようにみえる．ところが，実際には，$(2,2)$ 成分が純虚数であるため，σ はエルミート行列ではない．しかし，上の積分を実行する上では，$(2,2)$ 成分が純虚数であっても支障はない．逆に，それを実数にしてしまうと，σ についての積分が発散してしまう．

σ を導入することにより，指数関数の中で，Φ について 4 次の項が消去され，2 次の項だけが残る．このような変換を，Hubbard-Stratonovich 変換と呼び，場の理論的な方法においてよく使われる．その結果，Φ に関する積分は，式 (4.1.16) の形に書けることがわかるので，

$$\begin{aligned}\overline{Z(J)} &= c\int (\mathrm{d}\sigma)\exp\left\{-\frac{N}{2}\mathrm{STr}\ \sigma^2\right\}(\mathrm{Sdet}\ (x - r\sigma + i\epsilon + K))^{-N}\\ &= c\int (\mathrm{d}\sigma)\exp\{-N\mathcal{L}\}\end{aligned} \tag{4.2.18}$$

を得る．ここで，

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mathrm{STr}\,\sigma^2 + \mathrm{STr}\ln(x - r\sigma + i\epsilon + K) \tag{4.2.19}$$

である．極限 $N \to \infty$ における固有値密度の漸近形を得るためには，この $\overline{Z(J)}$ の漸近形を得ればよい．ここで，$\mathcal{L}$ は N に依存していないことに注意すべきである．N は，$\mathcal{L}$ の前の係数として現れるだけである．そのため，次の節で述べる鞍点法によって，漸近形を評価できる．

4.3　鞍点評価

第 3 章でも述べたように，$\int(\mathrm{d}\sigma)\exp\{-N\mathcal{L}\}$ の形の積分は，$N \to \infty$ においては，停留点（鞍点），すなわち σ を変えたときの $\mathcal{L}$ の変分がゼロになる点の近傍からの寄与によって評価できる [21]．その理由は，積分経路が鞍点を通過する方向を適当にとってやれば，鞍点のところに被積分関数の鋭いピークが生じるからである．

$\mathcal{L}$ の変分がゼロになるために超行列 σ が満たすべき方程式は，上に導いた $\mathcal{L}$ の具体的な形から，

$$\sigma(x - r\sigma) = r \tag{4.3.1}$$

であることがわかる．ここで，ϵ と J は，どちらも無限に小さくとることができるので，除いて考えてよい．この方程式の解が対角超行列であると仮定すると，対角成分の満たすべき方程式の解 σ_C は，

$$\sigma_C = \frac{x}{2r} \pm i\sqrt{1 - \frac{x^2}{4r^2}} \tag{4.3.2}$$

である．すなわち，平方根の前の符号のとり方に，$(1,1)$ 成分と $(2,2)$ 成分のそれぞれについて，2 つの可能性がある．

もともと，σ を定義したときには，σ の $(1,1)$ 成分は実数で，$(2,2)$ 成分は虚数であった．σ_C は，実軸からも虚軸からも一般には離れているので，積分値を変えないまま積分経路をずらして，σ_C を通るようにしてやる必要が

ある．積分値を変えないためには，経路を連続的にずらしていく途中で，特異点に交わらないようにしなければならない（Cauchy の積分定理）．$(1,1)$ 成分の特異点は，$x - r\sigma + i\epsilon = 0$, すなわち，$\sigma = (x + i\epsilon)/r$ のところにある．したがって，$(1,1)$ 成分の積分経路を，実軸より上の σ_C を通るようにずらそうとすると，途中で特異点と交わってしまう．したがって，σ_C としては，実軸より下にある方をとる必要がある．こうして，$(1,1)$ 成分について，平方根の前の符号のどちらを選べばよいかがわかる．$(2,2)$ 成分については，両方の符号をとることができるが，$N \to \infty$ で寄与が残るのは，$(1,1)$ 成分と同じ符号をとった場合だけである．

符号のとり方が決まったので，解 σ_C を代入することにより，固有値密度の平均は，

$$\begin{aligned}\overline{\rho(x)} &= \frac{1}{2\pi}\mathrm{Im}\left.\frac{\partial\overline{Z(J)}}{\partial J}\right|_{J=0} \\ &\sim -\frac{N}{2\pi}\mathrm{Im}\left.\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial J}\right|_{J=0,\ \sigma=\sigma_C} \\ &= -\frac{N}{\pi r}\mathrm{Im}\ \sigma_C \\ &= \begin{cases} \dfrac{N}{\pi r}\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4r^2}}, & |x| < 2r, \\ 0, & |x| > 2r \end{cases}\end{aligned} \tag{4.3.3}$$

のように評価される．これは，確かに Wigner の半円則を与える．符号のとり方の正しさは，固有値密度は必ず正かゼロであることからもわかる．

σ が 2×2 超行列であるのに対し，σ_C としては対角超行列だけを考えれば十分であったことに注意すべきである．一般に，k 体相関関数を考えるときには，$2k \times 2k$ 超行列が現れ，$k \geq 2$ においては非対角要素を無視できなくなる．非対角要素の効果をとり入れた有効モデルである非線形シグマモデルを構成し，その解析を行うことにより，2 体相関関数の評価が可能である [39, 40, 147]．しかし，超行列の方法によって相関関数を評価するためには，固有値密度のときより，かなり複雑な議論が必要になる．

4.4 非ガウス型の場合

次に，行列要素が独立に分布しているが，それぞれの要素の分布関数はガウス型でない場合を考える．例として，（対角成分の分散が 1 の）ガウス型ユニタリアンサンブルの確率分布関数

$$P(H)(\mathrm{d}H) \propto \mathrm{e}^{-(1/2)\mathrm{Tr}H^2}(\mathrm{d}H)$$
$$= \prod_{j=1}^{N} \mathrm{e}^{-(1/2)H_{jj}^2}\mathrm{d}H_{jj} \prod_{j<l}^{N} \mathrm{e}^{-(H_{jl}^R)^2-(H_{jl}^I)^2}\mathrm{d}H_{jl}^R\mathrm{d}H_{jl}^I \tag{4.4.1}$$

を一般化した分布関数

$$P(H)(\mathrm{d}H)$$
$$\propto \prod_{j=1}^{N} p(H_{jj})\mathrm{d}H_{jj} \prod_{j<l}^{N} p(\sqrt{2}H_{jl}^R)p(\sqrt{2}H_{jl}^I)\mathrm{d}H_{jl}^R\mathrm{d}H_{jl}^I \tag{4.4.2}$$

をとりあげることにしよう．ここで，確率分布関数 $p(x)$ は，フーリエ変換

$$\hat{p}(k) = \mathrm{e}^{F(k)}, \quad F(k) = -\frac{1}{2}k^2 + c_3k^3 + c_4k^4 + \cdots \tag{4.4.3}$$

を用いて，

$$p(x) = \frac{1}{2\pi}\int \hat{p}(k)\mathrm{e}^{ikx}\mathrm{d}k \tag{4.4.4}$$

のように定義される．一方，$\hat{p}(k)$ は，逆フーリエ変換によって，

$$\hat{p}(k) = \int p(x)\mathrm{e}^{-ikx}\mathrm{d}x \tag{4.4.5}$$

のように書ける．$c_3 = c_4 = \cdots = 0$ の特別な場合が，ガウス型ユニタリアンサンブルである．

係数 c_n $(n = 3, 4, \cdots)$ の意味を考えてみよう．x^n の確率分布関数 $p(x)$ に対する平均（モーメント）μ_n を計算すると，

$$\mu_n = \int x^n p(x)\mathrm{d}x = \left(i\frac{\partial}{\partial k}\right)^n \mathrm{e}^{F(k)}\bigg|_{k=0} \tag{4.4.6}$$

を得る．これから，

$$\mu_2 = 1, \quad \mu_3 = \frac{6}{i}c_3, \quad \mu_4 = 24c_4 + 3, \cdots \tag{4.4.7}$$

がわかる．すなわち，モーメント μ_m $(m \leq n)$ によって，係数 c_n が定まる．

超行列の方法によるガウス型アンサンブルのとり扱いでは，行列要素の分布関数は，因子 $\exp(-i\Phi^\dagger H\Phi)$ の平均の計算に現れた（式 (4.2.11)）．一般化されたアンサンブルにおいては，その平均は，

$$\begin{aligned}
& C\int (\mathrm{d}H)P\left(\frac{\sqrt{N}}{r}H\right)\mathrm{e}^{-i\mathrm{Tr}H(zz^\dagger-\eta\eta^\dagger)} \\
&= \prod_{j=1}^{N}\hat{p}\left(\frac{r}{\sqrt{N}}(zz^\dagger-\eta\eta^\dagger)_{jj}\right) \\
&\times \prod_{j<l}^{N}\hat{p}\left(\frac{r}{\sqrt{N}}\sqrt{2}(zz^\dagger-\eta\eta^\dagger)_{jl}^{R}\right)\hat{p}\left(\frac{r}{\sqrt{N}}\sqrt{2}(zz^\dagger-\eta\eta^\dagger)_{jl}^{I}\right)
\end{aligned} \tag{4.4.8}$$

のように評価される．$H \to (\sqrt{N}/r)H$ のスケーリングが（前と同様に）行われていることに注意してもらいたい．ところが，$N \to \infty$ においては，

$$\begin{aligned}
\hat{p}\left(\frac{r}{\sqrt{N}}k\right) &= \exp\left\{-\frac{r^2}{2N}k^2 + c_3\left(\frac{r}{\sqrt{N}}\right)^3 k^3 + c_4\left(\frac{r}{\sqrt{N}}\right)^4 k^4 + \cdots\right\} \\
&\sim \exp\left\{-\frac{r^2}{2N}k^2\right\}
\end{aligned} \tag{4.4.9}$$

なので，この平均はガウス型のときと同じ値になってしまう．このようにして，$N \to \infty$ においては一般化されたアンサンブルもガウス型アンサンブルと同じ固有値密度をもつこと，すなわち Wigner の半円則が成立することがわかる．

上の議論は，確率分布関数 $p(x)$ のモーメントと係数 c_n の関係からわかるように，すべてのモーメントが有限である場合に有効である．しかし，実際には，たとえ高次のモーメントが発散していても，分散さえ有限であれば，

Wigner の半円則が成り立つ．前にも書いた通り，このことは，すでに一般的に証明されている [54, 110].

それでは，Wigner の半円則が破れるのはどんな場合であろうか? 自然な例として，疎行列の場合を挙げることができる [88]．圧倒的多数の行列要素がゼロで，残りの行列要素がガウス分布している疎行列に対応する $p(x)$ は，

$$p(x) = \left(1 - \frac{1}{N^\alpha}\right)\delta(x) + \frac{1}{N^\alpha}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}x^2\right\} \tag{4.4.10}$$

のように書ける．ただし，$0 \leq \alpha \leq 1$ とする（普通のガウス型アンサンブルの場合 $\alpha = 0$ も含めておいた）．$p(x)$ の フーリエ変換は，

$$\hat{p}(k) = 1 - \frac{1}{N^\alpha}\left[1 - \exp\left\{-\frac{1}{2}k^2\right\}\right] \tag{4.4.11}$$

となる．このとき，気をつけるべきことは，多くの行列要素がゼロなので，固有値分布の幅が狭くなることである．それは，$N^{(1-\alpha)/2}$ のオーダーになるので，有限な固有値分布の幅を得るためには，$H \to (N^{(1-\alpha)/2}/r)H$ のスケーリングを行うべきである．よって，$N \to \infty$ において必要な $\hat{p}(k)$ の極限形は，

$$\begin{aligned}\hat{p}\left(\frac{r}{N^{(1-\alpha)/2}}k\right) &= 1 - \frac{1}{N^\alpha}\left[1 - \exp\left\{-\frac{r^2}{2N^{1-\alpha}}k^2\right\}\right] \\ &\sim \begin{cases} \exp\left\{-\dfrac{r^2}{2N}k^2\right\}, & 0 \leq \alpha < 1, \\ \exp\left\{-\dfrac{1}{N}\left(1 - \mathrm{e}^{-r^2k^2/2}\right)\right\}, & \alpha = 1 \end{cases}\end{aligned} \tag{4.4.12}$$

である．したがって，α が 1 より小さい間は，ガウス型のときと（スケールは異なるが）同じ形の固有値密度が保たれる．そして，$\alpha = 1$, すなわち，全体の $1/N$ 程度を除く行列要素がすべてゼロになったとき，初めて半円則の破れが生じる．半円則が成立するための条件として，ランダム行列が完全に密 $(\alpha = 0)$ である必要がないことは，とくに強調されるべきであろう．

このように，超行列の方法により，ガウス型以外のランダム行列アンサンブルの解析を行い，ガウス型でみられる特徴の適用限界を議論することができる．

章末問題

[1] ガウス型直交アンサンブルを超行列の方法で扱うためには，(4.1.8) 式で与えられる超ベクトル Φ の代わりに，

$$\Phi = \begin{pmatrix} z \\ z^* \\ \eta \\ \eta^* \end{pmatrix}$$

を使えばよいことを示し，実際に固有値密度を評価せよ．

[2] ガウス型シンプレクティックアンサンブルを超行列の方法で扱うには，どうすればよいか．

第 5 章　カイラルガウス型アンサンブル

次に，応用上重要なカイラルガウス型アンサンブルを導入しよう．カイラルガウス型直交アンサンブルは，最も歴史の古いランダム行列モデルであり，1928 年に，J. Wishart によって数理統計学に導入された [6, 143]．近年，J.J.M. Verbaarschot らによって，QCD（quantum chromodynamics; 量子色力学）格子ゲージ理論の有効モデルになることが発見され，素粒子物理学において注目されている [138]．また，非平衡統計力学のモデルである非対称排他過程 (asymmetric exclusion process) のゆらぎを記述することも知られている [71, 100]．さらに，金融相関行列の性質を再現することも発見され，金融工学における新しいモデルとしても研究されている [14, 78, 111]．本章では，まず，ガウス型アンサンブルと同様，直交，ユニタリ，シンプレクティックの 3 つの型があることを示す．その後，これらの 3 つの型の間を結ぶブラウン運動モデルを解説する．

5.1　カイラルガウス型直交アンサンブル

A は，$M \times N$ $(M \geq N)$ の実行列であるとしよう．このとき，カイラルガウス型直交アンサンブルの確率分布関数は，

$$P(A)(\mathrm{d}A) \propto \mathrm{e}^{-(1/2)\mathrm{Tr}A^{\mathrm{T}}A}(\mathrm{d}A) \tag{5.1.1}$$

によって与えられる．ただし，

$$(\mathrm{d}A) = \prod_{j=1}^{M}\prod_{l=1}^{N}\mathrm{d}A_{jl} \tag{5.1.2}$$

である．このアンサンブルにおいては，A の各要素が独立にガウス分布している．

$N \times N$ 実対称行列 $A^{\mathrm{T}}A$ の固有値は，一般には，非負の実数になる．ところが，いずれかの固有値がゼロになる確率はゼロなので，すべての固有値が正であるとみなして議論を進めることができる．すべての固有値が正であるとき，$A^{\mathrm{T}}A$ は正定値であるという．

ここで，よく知られた次の事実（特異値分解 [127]）に注目して，カイラルガウス型直交アンサンブルにおける $A^{\mathrm{T}}A$ の固有値の分布関数を求めよう．

定理 *5.1*　A が $M \times N$ $(M \geq N)$ 実行列で，$A^{\mathrm{T}}A$ は正定値であるとしよう．このとき，A は $A = VSU^{\mathrm{T}}$ の形に因子化される．ここで，U は $N \times N$ 直交行列，V は $M \times M$ 直交行列である．また，$M \times N$ 実行列 S は，

$$S = \begin{bmatrix} Y \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.1.3}$$

の形をとる．ここで，$N \times N$ 対角行列 Y の対角成分 $y_1, y_2, \cdots, y_N$ は A の特異値と呼ばれ，すべて正である．

ただちにわかるように，$A^{\mathrm{T}}A$ の固有値 x_j は，A の特異値 y_j と $x_j = y_j^2$ のように関係づけられる．そこで，カイラルガウス型直交アンサンブルにお

ける特異値の確率分布関数を導きたい．そのために，まず，次の**定理** *5.2* を証明する．

定理 *5.2*　$M \times N$ 実行列 X, Y の要素間の変数変換を考える．C は行列式がゼロでない $M \times M$ 実行列，D は行列式がゼロでない $N \times N$ 実行列であるとしよう．このとき，$X = CYD$ ならば，

$$(\mathrm{d}X) = |\det C|^N |\det D|^M (\mathrm{d}Y) \tag{5.1.4}$$

が成り立つ．ただし，

$$(\mathrm{d}X) = \prod_{j=1}^{M}\prod_{l=1}^{N} \mathrm{d}X_{jl}, \quad (\mathrm{d}Y) = \prod_{j=1}^{M}\prod_{l=1}^{N} \mathrm{d}Y_{jl} \tag{5.1.5}$$

である．

証明　$X = CY$ のとき，$\mathrm{d}X = [\mathrm{d}\mathbf{x}_1, \cdots, \mathrm{d}\mathbf{x}_N]$, $\mathrm{d}Y = [\mathrm{d}\mathbf{y}_1, \cdots, \mathrm{d}\mathbf{y}_N]$ とおくと $\mathrm{d}\mathbf{x}_l = C\mathrm{d}\mathbf{y}_l$ になる．したがって，

$$\bigwedge_{l=1}^{N}\bigwedge_{j=1}^{M} \mathrm{d}X_{jl} = \bigwedge_{l=1}^{N}(\det C)\bigwedge_{j=1}^{M} \mathrm{d}Y_{jl} = (\det C)^N \bigwedge_{l=1}^{N}\bigwedge_{j=1}^{M} \mathrm{d}Y_{jl} \tag{5.1.6}$$

である．一方，$X = YD$ のときは，$X^{\mathrm{T}} = D^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}}$ より，同様にして，

$$\bigwedge_{l=1}^{M}\bigwedge_{j=1}^{N} \mathrm{d}X_{lj} = \bigwedge_{l=1}^{M}(\det D)\bigwedge_{j=1}^{N} \mathrm{d}Y_{lj} = (\det D)^M \bigwedge_{l=1}^{M}\bigwedge_{j=1}^{N} \mathrm{d}Y_{lj} \tag{5.1.7}$$

になる．以上の結果を組み合わせると，**定理** *5.2* の成立が示される．

（証明終）

行列 A の特異値分解の両辺の微分をとると，

$$\mathrm{d}A = \mathrm{d}VSU^{\mathrm{T}} + VS\mathrm{d}U^{\mathrm{T}} + V\mathrm{d}SU^{\mathrm{T}} \tag{5.1.8}$$

を得る．ここで，左から V^{T}，右から U をかけると，

$$V^{\mathrm{T}}\mathrm{d}AU = V^{\mathrm{T}}\mathrm{d}VS + S\mathrm{d}U^{\mathrm{T}}U + \mathrm{d}S \tag{5.1.9}$$

が導かれる．直交行列の行列式の絶対値は 1 であるから，**定理** *5.2* より，

$$(\mathrm{d}A) = (V^{\mathrm{T}}\mathrm{d}AU) \tag{5.1.10}$$

である．したがって，(5.1.9) の右辺に現れる微分の外積を計算すればよいことがわかる．

ここで，部分行列 $(V^{\mathrm{T}}\mathrm{d}V)^{(u)}$ と $(V^{\mathrm{T}}\mathrm{d}V)^{(d)}$ を，

$$\begin{aligned} &[(V^{\mathrm{T}}\mathrm{d}V)^{(u)}]_{jl} = [V^{\mathrm{T}}\mathrm{d}V]_{jl}, \quad j,l = 1,2,\cdots,N \\ &[(V^{\mathrm{T}}\mathrm{d}V)^{(d)}]_{jl} = [V^{\mathrm{T}}\mathrm{d}V]_{j+N\ l}, \quad j = 1,2,\cdots,M-N,\ l = 1,2,\cdots,N \end{aligned} \tag{5.1.11}$$

によって定義すると，

$$V^{\mathrm{T}}\mathrm{d}AU = \begin{bmatrix} (V^{\mathrm{T}}\mathrm{d}V)^{(u)}Y + Y(\mathrm{d}U^{\mathrm{T}}U) + \mathrm{d}Y \\ (V^{\mathrm{T}}\mathrm{d}V)^{(d)}Y \end{bmatrix} \tag{5.1.12}$$

を得る．この式の右辺の上段と下段に現れる微分の外積をそれぞれ計算しよう．

まず，上段を考えると，$(V^{\mathrm{T}}\mathrm{d}V)^{(u)}$ と $\mathrm{d}U^{\mathrm{T}}U$ は実反対称行列であるから，対角成分からは，

$$\bigwedge_{j=1}^{N} \mathrm{d}y_j, \tag{5.1.13}$$

非対角成分からは，

$$\begin{aligned} &\bigwedge_{j\neq l}^{N} \left\{[V^{\mathrm{T}}\mathrm{d}V]_{jl}y_l + y_j[\mathrm{d}U^{\mathrm{T}}U]_{jl}\right\} \\ &= \bigwedge_{j>l}^{N} \left\{[V^{\mathrm{T}}\mathrm{d}V]_{jl}y_l + y_j[\mathrm{d}U^{\mathrm{T}}U]_{jl}\right\} \wedge \left\{-[V^{\mathrm{T}}\mathrm{d}V]_{jl}y_j - y_l[\mathrm{d}U^{\mathrm{T}}U]_{jl}\right\} \\ &= \bigwedge_{j>l}^{N} (y_l^2 - y_j^2)[\mathrm{d}U^{\mathrm{T}}U]_{jl} \wedge [V^{\mathrm{T}}\mathrm{d}V]_{jl} \end{aligned} \tag{5.1.14}$$

が導かれる．さらに，下段からの寄与を計算すると，

$$\bigwedge_{l=1}^{N} \bigwedge_{j=N+1}^{M} [V^{\mathrm{T}}\mathrm{d}V]_{jl}y_l = \bigwedge_{l=1}^{N} y_l^{M-N} \bigwedge_{j=N+1}^{M} [V^{\mathrm{T}}\mathrm{d}V]_{jl} \tag{5.1.15}$$

を得る．以上の結果から，測度 $(\mathrm{d}A)$ を，

$$(\mathrm{d}A)=\prod_{j=1}^{N}y_j^{M-N}\prod_{j<l}^{N}|y_j^2-y_l^2|\prod_{j=1}^{N}\mathrm{d}y_j\prod_{j<l}^{N}[U^{\mathrm{T}}\mathrm{d}U]_{jl}\mathrm{d}\Gamma \tag{5.1.16}$$

と書くことができることがわかった．ただし，

$$\mathrm{d}\Gamma=\prod_{l=1}^{N}\prod_{j=l+1}^{M}[V^{\mathrm{T}}\mathrm{d}V]_{jl} \tag{5.1.17}$$

である．これにより，カイラルガウス型直交アンサンブルにおける $A^{\mathrm{T}}A$ の固有値，固有ベクトルの分布関数は，

$$\begin{aligned}&p(x_j,\cdots,x_N)\prod_{j=1}^{N}\mathrm{d}x_j\prod_{j<l}^{N}[U^{\mathrm{T}}\mathrm{d}U]_{jl}\mathrm{d}\Gamma\\ \propto&\prod_{j=1}^{N}\mathrm{e}^{-x_j/2}x_j^{(M-N-1)/2}\prod_{j<l}^{N}|x_j-x_l|\prod_{j=1}^{N}\mathrm{d}x_j\prod_{j<l}^{N}[U^{\mathrm{T}}\mathrm{d}U]_{jl}\mathrm{d}\Gamma\end{aligned} \tag{5.1.18}$$

と結論される．

5.2 カイラルガウス型ユニタリアンサンブル

ガウス型アンサンブルのときと同様に，カイラルガウス型アンサンブルにも，対応するユニタリアンサンブルが存在する．A が $M\times N$ $(M\geq N)$ の複素行列ならば，$N\times N$ 複素行列 $A^{\dagger}A$ は，エルミート行列になる．カイラルガウス型ユニタリアンサンブルの確率分布関数は，このとき，

$$P(A)(\mathrm{d}A)\propto\mathrm{e}^{-\mathrm{Tr}A^{\dagger}A}(\mathrm{d}A) \tag{5.2.1}$$

によって与えられる．ただし，

$$(\mathrm{d}A)=\prod_{j=1}^{M}\prod_{l=1}^{N}\mathrm{d}A_{jl}^{R}\mathrm{d}A_{jl}^{I} \tag{5.2.2}$$

である．カイラルガウス型ユニタリアンサンブルにおいては，A の各要素の実部と虚部が，独立にガウス分布する．以下では，前節と同様，$A^\dagger A$ が正定値である場合に限って議論を進め，$A^\dagger A$ の固有値の確率分布関数を導くことにしよう．

$M \times N$ 複素行列 A に対しても，次のような特異値分解を行うことができる [83].

定理 *5.3* A が $M \times N$ $(M \geq N)$ 複素行列で，$A^\dagger A$ は正定値であるとしよう．このとき，A は $A = VSU^\dagger$ の形に因子化される．ここで，U は $N \times N$ ユニタリ行列，V は $M \times M$ ユニタリ行列である．また，$M \times N$ 実行列 S は，

$$S = \begin{bmatrix} Y \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.2.3}$$

の形をとる．ここで，$N \times N$ 対角行列 Y の対角成分 $y_1, y_2, \cdots, y_N$ は A の特異値と呼ばれ，すべて正である．

前と同様に，$A^\dagger A$ の固有値 x_j と A の特異値 y_j の関係は，$x_j = y_j^2$ である．カイラルガウス型ユニタリアンサンブルにおける特異値の確率分布関数を導くためには，次の**定理** *5.4* が有用である．

定理 *5.4* $M \times N$ 複素行列 X, Y の要素間の変数変換を考える．C は行列式がゼロでない $M \times M$ 複素行列，D は行列式がゼロでない $N \times N$ 複素行列であるとしよう．このとき，$X = CYD$ ならば，

$$(\mathrm{d}X) = |\det C|^{2N} |\det D|^{2M} (\mathrm{d}Y) \tag{5.2.4}$$

が成り立つ．ただし，

$$(\mathrm{d}X) = \prod_{j=1}^{M} \prod_{l=1}^{N} \mathrm{d}X_{jl}^R \mathrm{d}X_{jl}^I, \quad (\mathrm{d}Y) = \prod_{j=1}^{M} \prod_{l=1}^{N} \mathrm{d}Y_{jl}^R \mathrm{d}Y_{jl}^I \tag{5.2.5}$$

である．

証明　$X = CY$ のとき，$\mathrm{d}X = [\mathrm{d}\mathbf{x}_1, \cdots, \mathrm{d}\mathbf{x}_N]$, $\mathrm{d}Y = [\mathrm{d}\mathbf{y}_1, \cdots, \mathrm{d}\mathbf{y}_N]$ とおくと $\mathrm{d}\mathbf{x}_l = C\mathrm{d}\mathbf{y}_l$ であるから，

$$\bigwedge_{l=1}^{N} \bigwedge_{j=1}^{M} \left(\mathrm{d}X_{jl}^R \wedge \mathrm{d}X_{jl}^I\right) = \bigwedge_{l=1}^{N} |\det C|^2 \bigwedge_{j=1}^{M} \left(\mathrm{d}Y_{jl}^R \wedge \mathrm{d}Y_{jl}^I\right)$$
$$= |\det C|^{2N} \bigwedge_{l=1}^{N} \bigwedge_{j=1}^{M} \left(\mathrm{d}Y_{jl}^R \wedge \mathrm{d}Y_{jl}^I\right) \quad (5.2.6)$$

を得る．一方，$X = YD$ のときは，$X^\dagger = D^\dagger Y^\dagger$ より，

$$\bigwedge_{l=1}^{M} \bigwedge_{j=1}^{N} \left(\mathrm{d}X_{lj}^R \wedge \mathrm{d}X_{lj}^I\right) = \bigwedge_{l=1}^{M} |\det D|^2 \bigwedge_{j=1}^{N} \left(\mathrm{d}Y_{lj}^R \wedge \mathrm{d}Y_{lj}^I\right)$$
$$= |\det D|^{2M} \bigwedge_{l=1}^{M} \bigwedge_{j=1}^{N} \left(\mathrm{d}Y_{lj}^R \wedge \mathrm{d}Y_{lj}^I\right) \quad (5.2.7)$$

が導かれる．以上の結果の組み合わせにより，**定理** *5.4* が成立する．

（証明終）

行列 A の特異値分解より，

$$\mathrm{d}A = \mathrm{d}VSU^\dagger + VS\mathrm{d}U^\dagger + V\mathrm{d}SU^\dagger \quad (5.2.8)$$

となり，左から $V^\dagger$，右から U をかけると，

$$V^\dagger \mathrm{d}AU = V^\dagger \mathrm{d}VS + S\mathrm{d}U^\dagger U + \mathrm{d}S \quad (5.2.9)$$

を得る．ユニタリ行列の行列式の絶対値は 1 だから，**定理** *5.4* より，

$$(\mathrm{d}A) = (V^\dagger \mathrm{d}AU) \quad (5.2.10)$$

がわかる．したがって，(5.2.9) の右辺に現れる微分の外積を計算すればよい．

部分行列 $(V^\dagger \mathrm{d}V)^{(u)}$ と $(V^\dagger \mathrm{d}V)^{(d)}$ を，

$$[(V^\dagger \mathrm{d}V)^{(u)}]_{jl} = [V^\dagger \mathrm{d}V]_{jl}, \quad j, l = 1, 2, \cdots, N$$
$$[(V^\dagger \mathrm{d}V)^{(d)}]_{jl} = [V^\dagger \mathrm{d}V]_{j+N\ l}, \quad j = 1, 2, \cdots, M-N,\ l = 1, 2, \cdots, N \quad (5.2.11)$$

によって定義すると，

$$V^\dagger \mathrm{d}AU = \begin{bmatrix} (V^\dagger \mathrm{d}V)^{(u)}Y + Y(\mathrm{d}U^\dagger U) + \mathrm{d}Y \\ (V^\dagger \mathrm{d}V)^{(d)}Y \end{bmatrix} \tag{5.2.12}$$

を導くことができる．

ここで，特異値分解の不定性について考えておく必要がある．**定理** *5.3* の特異値分解は，

$$\begin{aligned} V &\mapsto V \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix}, \\ U &\mapsto UR \end{aligned} \tag{5.2.13}$$

の置き換えを行っても形が変わらない．ただし，R は $N \times N$ 対角ユニタリ行列，X は $(M-N)\times(M-N)$ ユニタリ行列である．(5.2.12) の右辺の V と U に対してこのような置き換えを行うと，X の微分は現れないが，R の微分が現れる．したがって，余分な R の自由度を消去するために，拘束条件を導入する必要がある．R の対角成分は，N 個の実パラメータ θ_j を用いて $\mathrm{e}^{i\theta_j}$, $j=1,2,\cdots,N$ の形に書ける．そこで，N 個の拘束条件として，

$$(\mathrm{d}U^\dagger U)^I_{jj} = 0, \quad j = 1,2,\cdots,N \tag{5.2.14}$$

を選ぶことにしよう．

それでは，(5.2.12) 右辺の上段に現れる微分の外積を計算しよう．$(V^\dagger \mathrm{d}V)^{(u)}$ と $\mathrm{d}U^\dagger U$ は反エルミート行列なので，拘束条件に注意すると，対角成分からは，

$$\bigwedge_{j=1}^{N} y_j \mathrm{d}y_j (V^\dagger \mathrm{d}V)^I_{jj}, \tag{5.2.15}$$

非対角成分からは，

$$\bigwedge_{j>l}^{N} (y_l^2 - y_j^2)^2 \left\{ [\mathrm{d}U^\dagger U]^R_{jl} \wedge [V^\dagger \mathrm{d}V]^R_{jl} \wedge [\mathrm{d}U^\dagger U]^I_{jl} \wedge [V^\dagger \mathrm{d}V]^I_{jl} \right\} \tag{5.2.16}$$

が導かれる．次に，(5.2.12) 右辺の下段からの寄与は，

$$\bigwedge_{l=1}^{N} y_l^{2(M-N)} \bigwedge_{j=N+1}^{M} \left\{ [V^\dagger \mathrm{d}V]^R_{jl} \wedge [V^\dagger \mathrm{d}V]^I_{jl} \right\} \tag{5.2.17}$$

になる．したがって，測度 $(\mathrm{d}A)$ は，

$$(\mathrm{d}A) = \prod_{j=1}^{N} y_j^{2(M-N)+1} \prod_{j<l}^{N} |y_j^2 - y_l^2|^2 \prod_{j=1}^{N} \mathrm{d}y_j \prod_{j<l}^{N} [U^\dagger \mathrm{d}U]_{jl}^R [U^\dagger \mathrm{d}U]_{jl}^I \mathrm{d}\Gamma \tag{5.2.18}$$

と書ける．ただし，

$$\mathrm{d}\Gamma = \prod_{j=1}^{N} [V^\dagger \mathrm{d}V]_{jj}^I \prod_{l=1}^{N} \prod_{j=l+1}^{M} [V^\dagger \mathrm{d}V]_{jl}^R [V^\dagger \mathrm{d}V]_{jl}^I \tag{5.2.19}$$

である．したがって，カイラルガウス型ユニタリアンサンブルにおける $A^\dagger A$ の固有値，固有ベクトルの分布関数は，

$$\begin{aligned} & p(x_j, \cdots, x_N) \prod_{j=1}^{N} \mathrm{d}x_j \prod_{j<l}^{N} [U^\dagger \mathrm{d}U]_{jl} \mathrm{d}\Gamma \\ & \propto \prod_{j=1}^{N} \mathrm{e}^{-x_j} x_j^{M-N} \prod_{j<l}^{N} |x_j - x_l|^2 \prod_{j=1}^{N} \mathrm{d}x_j \prod_{j<l}^{N} [U^\dagger \mathrm{d}U]_{jl}^R [U^\dagger \mathrm{d}U]_{jl}^I \mathrm{d}\Gamma \end{aligned} \tag{5.2.20}$$

である．

5.3 カイラルガウス型シンプレクティックアンサンブル

カイラルガウス型シンプレクティックアンサンブルは，次のように定義される．A が $M \times N$ $(M \geq N)$ 実四元数行列ならば，$N \times N$ 四元数行列 $A^\dagger A$ は，自己双対エルミート行列になる．カイラルガウス型シンプレクティックアンサンブルの確率分布関数は，このとき，

$$P(A)(\mathrm{d}A) \propto \mathrm{e}^{-2\mathrm{Tr}A^\dagger A}(\mathrm{d}A) \tag{5.3.1}$$

によって与えられ，A の実四元数要素の第 $0, 1, 2, 3$ 成分が，それぞれ独立にガウス分布する．ただし，

$$(\mathrm{d}A) = \prod_{j=1}^{M} \prod_{l=1}^{N} \prod_{k=0}^{3} \mathrm{d}A_{jl}^{(k)} \tag{5.3.2}$$

である．以下では，$A^\dagger A$ が正定値であるとして議論を進め，$A^\dagger A$ の固有値の確率分布関数を導出する．

$M \times N$ 四元数行列 A に対する特異値分解は，次のような形になる [144].

定理 *5.5* A が $M \times N$ $(M \geq N)$ 実四元数行列で，$A^\dagger A$ は正定値であるとしよう．このとき，A は $A = VSU^\dagger$ の形に因子化される．ここで，U は $N \times N$ シンプレクティック行列，V は $M \times M$ シンプレクティック行列である．また，$M \times N$ 実スカラー行列 S は，

$$S = \begin{bmatrix} Y \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5.3.3}$$

の形をとる．ここで，$N \times N$ 対角行列 Y の対角成分 $y_1, y_2, \cdots, y_N$ は A の特異値と呼ばれ，すべて正である．

前と同様，$A^\dagger A$ の固有値 x_j は，A の特異値 y_j との間に $x_j = y_j^2$ の関係をもつ．カイラルガウス型シンプレクティックアンサンブルにおける特異値の確率分布関数を導くために，次の**定理** *5.6* を証明する．

定理 *5.6* $M \times N$ 実四元数行列 X, Y の要素間の変数変換を考える．C は $\chi(C)$ の行列式がゼロでない $M \times M$ 実四元数行列，D は $\chi(D)$ の行列式がゼロでない $N \times N$ 実四元数行列であるとしよう．このとき，$X = CYD$ ならば，

$$(\mathrm{d}X) = |\det \chi(C)|^{2N} |\det \chi(D)|^{2M} (\mathrm{d}Y) \tag{5.3.4}$$

が成り立つ（$\chi(C), \chi(D)$ の定義は，1.1 節参照）．ただし，

$$(\mathrm{d}X) = \prod_{j=1}^{M} \prod_{l=1}^{N} \prod_{k=0}^{3} \mathrm{d}X_{jl}^{(k)}, \quad (\mathrm{d}Y) = \prod_{j=1}^{M} \prod_{l=1}^{N} \prod_{k=0}^{3} \mathrm{d}Y_{jl}^{(k)} \tag{5.3.5}$$

である．

<u>証明</u>　$X = CY$ のとき，$\mathrm{d}X = [\mathrm{d}\mathbf{x}_1, \cdots, \mathrm{d}\mathbf{x}_N]$, $\mathrm{d}Y = [\mathrm{d}\mathbf{y}_1, \cdots, \mathrm{d}\mathbf{y}_N]$ とおくと $\mathrm{d}\mathbf{x}_l = C\mathrm{d}\mathbf{y}_l$ である．したがって，

$$\bigwedge_{l=1}^{N}\bigwedge_{j=1}^{M}\bigwedge_{k=0}^{3}\mathrm{d}X_{jl}^{(k)} = \bigwedge_{l=1}^{N}|\det\chi(C)|^2\bigwedge_{j=1}^{M}\bigwedge_{k=0}^{3}\mathrm{d}Y_{jl}^{(k)}$$
$$= |\det\chi(C)|^{2N}\bigwedge_{l=1}^{N}\bigwedge_{j=1}^{M}\bigwedge_{k=0}^{3}\mathrm{d}Y_{jl}^{(k)} \tag{5.3.6}$$

である．また，$X = YD$ のときは，

$$\chi(X^\dagger) = (\chi(X))^\dagger = (\chi(YD))^\dagger = (\chi(Y)\chi(D))^\dagger$$
$$= (\chi(D))^\dagger(\chi(Y))^\dagger = \chi(D^\dagger)\chi(Y^\dagger) = \chi(D^\dagger Y^\dagger) \tag{5.3.7}$$

より $X^\dagger = D^\dagger Y^\dagger$ なので，

$$\bigwedge_{l=1}^{M}\bigwedge_{j=1}^{N}\bigwedge_{k=0}^{3}\mathrm{d}X_{lj}^{(k)} = \bigwedge_{l=1}^{M}|\det\chi(D)|^2\bigwedge_{j=1}^{N}\bigwedge_{k=0}^{3}\mathrm{d}Y_{lj}^{(k)}$$
$$= |\det\chi(D)|^{2M}\bigwedge_{l=1}^{M}\bigwedge_{j=1}^{N}\bigwedge_{k=0}^{3}\mathrm{d}Y_{lj}^{(k)} \tag{5.3.8}$$

を得る．以上の結果を組み合わせることにより，**定理** *5.6* の成立が示される．

（証明終）

行列 A の特異値分解より，

$$\mathrm{d}A = \mathrm{d}VSU^\dagger + VS\mathrm{d}U^\dagger + V\mathrm{d}SU^\dagger \tag{5.3.9}$$

が導かれる．ここで，左から $V^\dagger$，右から U をかけると，

$$V^\dagger\mathrm{d}AU = V^\dagger\mathrm{d}VS + S\mathrm{d}U^\dagger U + \mathrm{d}S \tag{5.3.10}$$

を得る．U, V はシンプレクティック行列なので，**定理** *5.6* より，

$$(\mathrm{d}A) = (V^\dagger\mathrm{d}AU) \tag{5.3.11}$$

である．したがって，(5.3.10) の右辺に現れる微分の外積を計算すればよい．

部分行列 $(V^\dagger \mathrm{d}V)^{(u)}$ と $(V^\dagger \mathrm{d}V)^{(d)}$ を，

$$[(V^\dagger \mathrm{d}V)^{(u)}]_{jl} = [V^\dagger \mathrm{d}V]_{jl}, \quad j, l = 1, 2, \cdots, N$$
$$[(V^\dagger \mathrm{d}V)^{(d)}]_{jl} = [V^\dagger \mathrm{d}V]_{j+N\ l}, \quad j = 1, 2, \cdots, M-N,\ l = 1, 2, \cdots, N \tag{5.3.12}$$

のように定義すると，

$$V^\dagger \mathrm{d}AU = \begin{bmatrix} (V^\dagger \mathrm{d}V)^{(u)} Y + Y(\mathrm{d}U^\dagger U) + \mathrm{d}Y \\ (V^\dagger \mathrm{d}V)^{(d)} Y \end{bmatrix} \tag{5.3.13}$$

が導かれる．

前節と同様に，特異値分解の不定性について考えておこう．**定理** *5.5* の特異値分解は，

$$V \mapsto V \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix},$$
$$U \mapsto UR \tag{5.3.14}$$

の置き換えを行っても形が変わらない．ここで，R は $N \times N$ 対角シンプレクティック行列，X は $(M-N) \times (M-N)$ シンプレクティック行列である．(5.3.13) の右辺の V と U に対してこのような置き換えを行ったとき，X の微分は現れないが，R の微分が現れる．したがって，拘束条件を導入して，余分な R の自由度を消去する必要がある．R の対角成分は，$3N$ 個の実パラメータ $\theta_j^{(k)}$ を用いて $\exp\left\{\sum_{k=1}^{3} e_k \theta_j^{(k)}\right\}$, $j = 1, 2, \cdots, N$ の形に書ける．そこで，$3N$ 個の拘束条件として，

$$(\mathrm{d}U^\dagger U)_{jj}^{(k)} = 0, \quad k = 1, 2, 3, \ \ j = 1, 2, \cdots, N \tag{5.3.15}$$

を選ぶことができる．

まず，(5.3.13) 右辺の上段に現れる微分の外積を計算しよう．$(V^\dagger \mathrm{d}V)^{(u)}$ と $\mathrm{d}U^\dagger U$ は反エルミート行列なので，拘束条件に注意すると，対角成分か

らは，

$$\bigwedge_{j=1}^{N} y_j^3 \mathrm{d}y_j \bigwedge_{k=1}^{3} (V^\dagger \mathrm{d}V)_{jj}^{(k)} \tag{5.3.16}$$

を得る．また，非対角成分からは，

$$\bigwedge_{j>l}^{N} (y_l^2 - y_j^2)^4 \bigwedge_{k=0}^{3} \left\{ [\mathrm{d}U^\dagger U]_{jl}^{(k)} \wedge [V^\dagger \mathrm{d}V]_{jl}^{(k)} \right\} \tag{5.3.17}$$

が導かれる．次に，(5.3.13) 右辺の下段からの寄与は，

$$\bigwedge_{l=1}^{N} y_l^{4(M-N)} \bigwedge_{j=N+1}^{M} \bigwedge_{k=0}^{3} [V^\dagger \mathrm{d}V]_{jl}^{(k)} \tag{5.3.18}$$

になる．したがって，測度 $(\mathrm{d}A)$ は，

$$(\mathrm{d}A) = \prod_{j=1}^{N} y_j^{4(M-N)+3} \prod_{j<l}^{N} |y_j^2 - y_l^2|^4 \prod_{j=1}^{N} \mathrm{d}y_j \prod_{j<l}^{N} \prod_{k=0}^{3} [U^\dagger \mathrm{d}U]_{jl}^{(k)} \mathrm{d}\Gamma \tag{5.3.19}$$

と書ける．ただし，

$$\mathrm{d}\Gamma = \prod_{j=1}^{N} \prod_{k=1}^{3} [V^\dagger \mathrm{d}V]_{jj}^{(k)} \prod_{l=1}^{N} \prod_{j=l+1}^{M} \prod_{k=0}^{3} [V^\dagger \mathrm{d}V]_{jl}^{(k)} \tag{5.3.20}$$

である．したがって，カイラルガウス型シンプレクティックアンサンブルにおける $A^\dagger A$ の固有値，固有ベクトルの分布関数は，

$$\begin{aligned} &p(x_j, \cdots, x_N) \prod_{j=1}^{N} \mathrm{d}x_j \prod_{j<l}^{N} [U^\dagger \mathrm{d}U]_{jl} \mathrm{d}\Gamma \\ &\propto \prod_{j=1}^{N} \mathrm{e}^{-2x_j} x_j^{2M-2N+1} \prod_{j<l}^{N} |x_j - x_l|^4 \prod_{j=1}^{N} \mathrm{d}x_j \prod_{j<l}^{N} \prod_{k=0}^{3} [U^\dagger \mathrm{d}U]_{jl}^{(k)} \mathrm{d}\Gamma \end{aligned} \tag{5.3.21}$$

のように求まる．

5.4 ブラウン運動モデル

カイラルガウス型アンサンブルに対するブラウン運動モデルにおいては，ガウス型のときと同様，$M \times N$ 行列 A を，

$$A = \mathrm{e}^{-\tau}(A^{(0)} + \sqrt{\mathrm{e}^{2\tau} - 1}A^{(\infty)}) \tag{5.4.1}$$

の組み合わせによって構成する．ここで，$A^{(\infty)}$ の要素は，実数 ($\beta = 1$)，複素数 ($\beta = 2$)，実四元数 ($\beta = 4$) の 3 通りにとることができる．$A^{(0)}$ は $A^{(\infty)}$ と同じか，あるいはより制限された対称性をもつ行列であり，$\tau = 0$ における初期条件を定める．

$A^{(\infty)}$ の確率分布がカイラルガウス型であれば，ブラウン運動モデルの確率分布関数は，

$$\begin{aligned} P(A^{(0)}, A; \tau)(\mathrm{d}A) &= (\beta/(2\pi))^{\beta MN/2}(1 - \mathrm{e}^{-2\tau})^{-\beta MN/2} \\ &\times \exp\left[-\frac{\beta}{2(1-\mathrm{e}^{-2\tau})}\mathrm{Tr}\left\{(A - \mathrm{e}^{-\tau}A^{(0)})^\dagger(A - \mathrm{e}^{-\tau}A^{(0)})\right\}\right](\mathrm{d}A) \end{aligned} \tag{5.4.2}$$

になる．測度 $(\mathrm{d}A)$ は，$\beta = 1, 2, 4$ に対して，それぞれ，(5.1.16), (5.2.18), (5.3.19) によって与えられる．このとき，$N \times N$ 行列

$$B = A^\dagger A \tag{5.4.3}$$

の固有値の運動を考えたい．

たとえば，$\beta = 2$ のときには，$P(A^{(0)}, A; \tau)$ を行列要素について微分することにより，Fokker-Planck 方程式

$$\frac{\partial P}{\partial \tau} = \Delta P + \sum_{j=1}^{M}\sum_{l=1}^{N}\left[\frac{\partial}{\partial A_{jl}^R}(A_{jl}^R P) + \frac{\partial}{\partial A_{jl}^I}(A_{jl}^I P)\right] \tag{5.4.4}$$

を得る．ここで，Δ は Laplace-Beltrami 演算子

$$\Delta = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{M}\sum_{l=1}^{N}\left[\frac{\partial^2}{\partial(A_{jl}^R)^2} + \frac{\partial^2}{\partial(A_{jl}^I)^2}\right] \tag{5.4.5}$$

である．この Fokker-Planck 方程式の変数を，座標変換により，行列要素から固有値変数，固有ベクトル変数に変えれば，固有値の運動を記述する微分方程式が得られることになる．

行列 B の固有値を $x_1, \cdots, x_N$ とするとき，新しい変数 $y_j = \sqrt{x_j}$ を導入しよう．この新しい変数の確率分布関数を $p(y_1, \cdots, y_N; \tau) \prod_{j=1}^{N} \mathrm{d}y_j$ とする．このとき，ガウス型のときと同様の方法により座標変換を行うことができ，$\beta = 1, 2, 4$ すべての場合に対して，Fokker-Planck 方程式

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} = \mathcal{L} p, \quad \mathcal{L} = \frac{1}{\beta} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial y_j} \mathrm{e}^{-\beta W} \frac{\partial}{\partial y_j} \mathrm{e}^{\beta W} \tag{5.4.6}$$

を導出できる．$\tau \to \infty$ の極限においては，確率分布関数は $A^{(0)}$ に依存せず，

$$\lim_{\tau \to \infty} p \propto \mathrm{e}^{-\beta W} \tag{5.4.7}$$

を与える．ただし，重み関数 W は，

$$W = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} y_j^2 - \left(a + 1 - \frac{1}{\beta} \right) \sum_{j=1}^{N} \log y_j - \sum_{j<k}^{N} \log |y_k^2 - y_j^2| \tag{5.4.8}$$

である．ガウス型のときと異なり，パラメータ a が入っている．このパラメータは，

$$a = M - N \tag{5.4.9}$$

によって定められる．

Fokker-Planck 方程式 (5.4.6) は，N 粒子の虚数時間シュレーディンガー方程式に変換される．すなわち，新しい演算子 $\mathcal{H}$ を，

$$-\frac{1}{\beta}(\mathcal{H} - E_0) = \mathrm{e}^{\beta W/2} \mathcal{L} \mathrm{e}^{-\beta W/2} \tag{5.4.10}$$

のように導入（E_0 は定数）すると，

$$\mathcal{H} = -\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial^2}{\partial y_j^2} + \sum_{j=1}^{N} \left\{ \frac{\beta}{2} a' \left(\frac{\beta}{2} a' - 1 \right) \frac{1}{y_j^2} + \frac{\beta^2}{4} y_j^2 \right\}$$
$$+ 2\beta \left(\frac{\beta}{2} - 1 \right) \sum_{j<l}^{N} \frac{y_j^2 + y_l^2}{(y_j^2 - y_l^2)^2} \tag{5.4.11}$$

となる．ただし，

$$a' = a + 1 - \frac{1}{\beta} \tag{5.4.12}$$

である．この演算子 $\mathcal{H}$ は，Calogero-Sutherland 型ハミルトニアンの変形である [107].

ここで，虚数時間シュレーディンガー方程式

$$-\beta \frac{\partial}{\partial \tau} \Psi = \mathcal{H} \Psi \tag{5.4.13}$$

のグリーン関数解を，

$$\Psi = G_S(y_1^0, y_2^0, \cdots, y_N^0; y_1, y_2, \cdots, y_N; \tau) \tag{5.4.14}$$

とすると，Fokker-Planck 方程式のグリーン関数解 G は，

$$G(y_1^0, \cdots, y_N^0; y_1, \cdots, y_N; \tau)$$
$$= \mathrm{e}^{\tau E_0/\beta} \frac{\mathrm{e}^{-\beta W(y_1, \cdots, y_N)/2}}{\mathrm{e}^{-\beta W(y_1^0, \cdots, y_N^0)/2}} G_S(y_1^0, \cdots, y_N^0; y_1, \cdots, y_N; \tau) \tag{5.4.15}$$

で与えられることがわかる．

$\beta = 2$ の場合には，シュレーディンガー方程式の相互作用項がゼロになる．したがって，ガウス型のときと同様に，N 体グリーン関数 G は，1 体グリーン関数を要素にもつ行列式の形に書くことができる．$\beta = 2$ のとき，1 体のシュレーディンガー方程式は，

$$-2 \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = \left[-\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{a'(a'-1)}{y^2} + y^2 \right] \Psi \tag{5.4.16}$$

であり，その解は，

$$\Psi_n(y;\tau) = \sqrt{\frac{2n!}{(n+a)!}}\mathrm{e}^{-\gamma_n\tau}\mathrm{e}^{-y^2/2}y^{a+(1/2)}L_n^{(a)}(y^2), \quad n=0,1,2,\cdots \tag{5.4.17}$$

によって与えられる．ただし，$L_n^{(a)}(x)$ は Laguerre 多項式

$$L_n^{(a)}(x) = \frac{x^{-a}\mathrm{e}^x}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\mathrm{e}^{-x}x^{n+a}\right) \tag{5.4.18}$$

であり，また，γ_n は，

$$\gamma_n = 2\left(n + \frac{a+1}{2}\right) \tag{5.4.19}$$

によって定義される．そこで，元の変数 $x_j = y_j^2$ を使ったとき，グリーン関数は，

$$\begin{aligned} &G(x_1^{(0)},\cdots,x_N^{(0)};x_1,\cdots,x_N;\tau)dx_1\cdots dx_N \\ &= G(y_1^{(0)},\cdots,y_N^{(0)};y_1,\cdots,y_N;\tau)dy_1\cdots dy_N \end{aligned} \tag{5.4.20}$$

のように書き直されることに注意すると，1 体のグリーン関数は，

$$g(x^{(0)},x;\tau) = (x^{(0)}x)^{a/2}\mathrm{e}^{-(x^{(0)}+x)/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{h_n}C_n(x^{(0)})C_n(x)\mathrm{e}^{-\gamma_n\tau} \tag{5.4.21}$$

となる．直交多項式 $C_n(x) = x^n + \cdots$ は，直交関係

$$\int_0^\infty x^a\mathrm{e}^{-x}C_m(x)C_n(x)\mathrm{d}x = h_n\delta_{mn} \tag{5.4.22}$$

を満たし，Laguerre 多項式 $L_n^{(a)}(x)$ を使って，

$$C_n(x) = (-1)^n n! L_n^{(a)}(x) \tag{5.4.23}$$

のように書ける．また，規格化定数 h_n は，

$$h_n = \Gamma(n+1)\Gamma(n+a+1) \tag{5.4.24}$$

である．1 体のグリーン関数の行列式をつくることにより，N 体のグリーン関数は，

$$
\begin{aligned}
&G(x_1^{(0)},\cdots,x_N^{(0)};x_1,\cdots,x_N;\tau)\\
&=\mathrm{e}^{E_0\tau/2}\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{x_j}{x_j^{(0)}}\right)^{a/2}\mathrm{e}^{-x_j/2+x_j^{(0)}/2}\prod_{j<l}^{N}\frac{(x_l-x_j)}{(x_l^{(0)}-x_j^{(0)})}\\
&\times\det[g(x_j^{(0)},x_l;\tau)]_{j,l=1,\cdots,N}
\end{aligned}
\tag{5.4.25}
$$

となる．ガウス型のときと同様，この N 体グリーン関数を，ユニタリ行列についての積分公式とみなすことができる [56, 68].

グリーン関数解より，$p_0(x_1^0,\cdots,x_N^0)$ を $\tau=0$ における初期分布として，全粒子分布関数 p を，

$$
\begin{aligned}
&p(x_1^1,\cdots,x_N^1;x_1^2,\cdots,x_N^2;\cdots;x_1^M,\cdots,x_N^M)\\
&=\frac{1}{N!}\int_0^\infty \mathrm{d}x_1^0\cdots\int_0^\infty \mathrm{d}x_N^0 p_0(x_1^0,\cdots,x_N^0)\\
&\times\prod_{l=1}^{M}G(x_1^{l-1},\cdots,x_N^{l-1};x_1^l,\cdots,x_N^l;\tau_l-\tau_{l-1}),\\
&\tau_0=0
\end{aligned}
\tag{5.4.26}
$$

にしたがって計算する．初期条件として，$A^{(0)}$ が実行列の場合と実四元数行列の場合を考えると，初期分布は，それぞれ，

$$
p_0(x_1,\cdots,x_N)\propto\begin{cases}\displaystyle\prod_{j=1}^{N}\sqrt{u(x_j)}\prod_{j<l}^{N}|x_j-x_l|,\\[2ex] \displaystyle\sum_P\prod_{j=1}^{N/2}u(x_j)\delta(x_j-x_{j+N/2})\prod_{j<l}^{N/2}|x_j-x_l|^4\end{cases}
\tag{5.4.27}
$$

によって与えられる．ただし，初期条件が実四元数行列の場合には，N は偶数である．また，和 $\sum_P$ を x_j の置換に対してとり，初期分布を準位の入れ

替えに対して対称にしている．ガウス型のときと同様に，$u(x)$ としては，一般の関数形を許すことにする（ただし，$0 < x < \infty$）．

それぞれの p_0 に対して，$x_1^0, \cdots, x_N^0$ についての積分を実行すると，ガウス型のときと同様の方法により，N が偶数のときには，

$$\begin{aligned}
&p(x_1^1, \cdots, x_N^1; x_1^2, \cdots, x_N^2; \cdots; x_1^M, \cdots, x_N^M) \\
&\propto \prod_{j=1}^{N} \sqrt{w(x_j^M)} \prod_{j>l}^{N} (x_j^M - x_l^M) \mathrm{Pf}[F_{jl}^{11}]_{j,l=1,2,\cdots,N} \\
&\times \prod_{k=1}^{M-1} \det[g_{jl}^{k+1\ k}]_{j,l=1,2,\cdots,N}
\end{aligned} \tag{5.4.28}$$

を得る．ただし，$w(x) = x^a \mathrm{e}^{-x}$ である．行列 g^{mn} は，

$$g_{jl}^{mn} = g(x_j^m, x_l^n; \tau_m - \tau_n) \tag{5.4.29}$$

によって定義され，一方，行列 F^{mn} は，

$$F_{jl}^{mn} = F(x_j^m, x_l^n; \tau_m, \tau_n) \tag{5.4.30}$$

によって定義される．ただし，初期条件が実行列と実四元数行列の場合に対応して，それぞれ

$$\begin{aligned}
&F(x, y; \tau, \tau') \\
&= \int_0^\infty \mathrm{d}z' \int_0^{z'} \mathrm{d}z \sqrt{\frac{u(z)u(z')}{w(z)w(z')}} \{g(x, z; \tau)g(y, z'; \tau') - g(y, z; \tau')g(x, z'; \tau)\}
\end{aligned} \tag{5.4.31}$$

および

$$\begin{aligned}
&F(x, y; \tau, \tau') \\
&= \int_0^\infty \mathrm{d}z \frac{u(z)}{w(z)} \left\{ g(x, z; \tau) \frac{\partial}{\partial z} g(y, z; \tau') - g(y, z; \tau') \frac{\partial}{\partial z} g(x, z; \tau) \right\}
\end{aligned} \tag{5.4.32}$$

である．N が奇数のときは，初期条件が実行列の場合についてだけ，

$$\begin{aligned}
&p(x_1^1,\cdots,x_N^1;x_1^2,\cdots,x_N^2;\cdots;x_1^M,\cdots,x_N^M)\\
&\propto \prod_{j=1}^{N}\sqrt{w(x_j^M)}\prod_{j>l}^{N}(x_j^M-x_l^M)\mathrm{Pf}\begin{bmatrix}[F_{jl}^{11}]_{j,l=1,2,\cdots,N} & [f_j^1]_{j=1,\cdots,N}\\ -[f_l^1]_{l=1,\cdots,N} & 0\end{bmatrix}\\
&\times\prod_{k=1}^{M-1}\det[g_{jl}^{k+1\ k}]_{j,l=1,2,\cdots,N}
\end{aligned} \tag{5.4.33}$$

となる．ここで，F^{mn} は (5.4.30) と (5.4.31) によって定められ，また，

$$f_j^m = f(x_j^m;\tau_m) \tag{5.4.34}$$

である．ただし，

$$f(x;\tau)=\int_0^\infty\sqrt{\frac{u(z)}{w(z)}}g(x,z;\tau)\mathrm{d}z \tag{5.4.35}$$

とする．

章末問題

[1] カイラルガウス型アンサンブルの固有値密度の漸近形を，Hilbert 変換の方法で評価したい．固有値の確率分布関数は，

$$P(x_1,\cdots,x_N)=\propto \mathrm{e}^{-\beta W(x_1,\cdots,x_N)},\quad 0<x_1,\cdots,x_N<\infty$$

で与えられる．ただし，

$$W(x_1,\cdots,x_N)=\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{x_j}{2}-\alpha\ln x_j\right)-\sum_{j<l}^{N}\ln|x_j-x_l|$$

である．直交アンサンブル，ユニタリアンサンブル，シンプレクティックアンサンブルは，それぞれ $\beta=1,2,4$ に対応する．また，$\alpha=(M-N+1)/2-(1/\beta)$ で

ある．いま，$N \to \infty$ において，$\alpha \sim \bar{\alpha} N$ であるとしよう．$\sum_{j=1}^{N} \delta(x - x_j)$ の平均を固有値密度 $\rho(x)$ とし，それに対して，$\bar{\rho}(\lambda)$ を，

$$\bar{\rho}(\lambda) = \rho(N\lambda)$$

によって定義する．このとき，$\bar{\rho}(\lambda)$ の $N \to \infty$ における振る舞いを決める条件は，

$$P\int_0^{\infty} \mathrm{d}\mu \frac{\bar{\rho}(\mu)}{\lambda - \mu} = \frac{1}{2} - \frac{\bar{\alpha}}{\lambda}$$

で与えられることを示せ．

[2] 上で導いた条件式を，$0 < a < \lambda < b$ において，

$$\bar{\rho}(\lambda) = \begin{cases} 0, & \lambda < a, \\ \sqrt{(b-\lambda)(\lambda - a)}/(2\pi\lambda), & a < \lambda < b, \\ 0, & \lambda > b \end{cases}$$

が満たすことを示せ（ヒント: Hilbert 変換の公式 (3.1.18) および積分公式

$$\int_a^b \frac{\sqrt{(b-x)(x-a)}}{x} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}(\sqrt{b} - \sqrt{a})^2, \quad 0 < a < b$$

を使ってよい）．ただし，$\sqrt{ab} = 2\bar{\alpha}$ とする．

[3] $\bar{\rho}(\lambda)$ に対する規格化条件から a と b を決定し，固有値密度 $\rho(x)$ の漸近形を求めよ．

第6章 固有値の相関関数（ガウス型アンサンブル）

ガウス型ランダム行列アンサンブルについて，第3章と第4章では固有値の平均密度を考え，Wigner の半円則が成立することを示した．しかし，それがすべてではない．まえがきで触れたように，原子核，メソスコピック系，カオス系などのエネルギー準位統計の研究から，物理学への応用においては，固有値分布のゆらぎこそ重要であることがわかっている．その理由としては，

(1) 現実の物理系におけるエネルギー準位の平均密度は，系の特性に強く依存する．一方，固有値分布のゆらぎには，普遍性 (universality) があり，多くの系において共通の統計的性質が観測される（ただし，特別な点のまわりにおいては，平均密度も普遍性をもつことがある [4, 138]）．

(2) 固有値分布のゆらぎには普遍性があるが，系の対称性には強く依存する．系の対称性は，行列の対称性として実現され，たとえば，直交アンサンブル，ユニタリアンサンブル，シンプレクティックアンサンブルの違いとなって現れる．これにより，普遍性を分類することができる [23, 146]．また，固有値分布のゆらぎを観測することにより，系の対称性を知ることもできる．

(3) 量子エネルギー準位の分布のゆらぎは，対応する古典極限の性質に強く

依存する．すなわち，対応する古典系が可積分系である場合とカオス系の場合で大きな違いがあり，カオス系に対応している場合のゆらぎが，ランダム行列理論によって再現される [52, 119, 121]．このような古典極限との関連性は，ゆらぎに着目することによって明らかになる．ただし，量子カオス系に対しては，アンサンブル平均ではなく，1 つのエネルギー準位列の中から抜き出してきた多くの部分列についての平均（スペクトル平均）を考えることになる．したがって，アンサンブル平均とスペクトル平均の等価性（エルゴード性）[108] が問題になることに，注意すべきである．

といったことが挙げられる．したがって，固有値分布のゆらぎを評価することが，ランダム行列理論における重要な課題となっている．ゆらぎを評価するための量としては，2 準位相関関数，最近接準位間隔分布などがよく用いられるが，一般的には，任意数の準位の相関関数を評価する必要がある．実際，3 準位以上の高次相関についても，実験データとの一致が確認されている [13].

個々のランダム行列アンサンブルについては，Dyson らにより，任意数の準位間の相関関数が，四元数行列式の形をとることが示された [32, 33, 83]．その後，アンサンブル間の遷移においても，遷移の行き先がユニタリアンサンブルであれば，途中のある時点での相関関数が，四元数行列式で表されることが示された [87, 109]．さらに，最近になって，遷移の全貌を記述する動的相関関数に対しても，四元数行列式の形が有効であることが明らかにされた [94, 96]．本章においては，著者自身の研究成果であるこの新しい結果を解説する．

6.1 ユニタリアンサンブル

まず，遷移の行き先であるユニタリアンサンブルの相関関数について解説しておこう．この場合には，相関関数は普通の行列式の形に書け，議論が単純である．相関関数に対する議論の基本的な進め方を理解するためには，こ

の単純な場合から始めるのがよいと思われる．

第 2 章および第 5 章で導き出したように，ユニタリアンサンブルの全固有値分布関数は，

$$p(x_1,\cdots,x_N)\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_N = c\prod_{j=1}^{N} w(x_j)\prod_{j<l}^{N}|x_j-x_l|^2\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_N \quad (6.1.1)$$

の形をとる．次に定義する相関関数は，定数 c に依存しない．そこで，以後は $c=1$ とおくことにする．相関関数とは，N 個の全固有値の中から取り出した k 個の固有値 $x_1,\cdots,x_k$ が，微小体積 $\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_k$ の中にある確率を表し，

$$\rho(x_1,\cdots,x_k) = \frac{1}{c_N}\frac{N!}{(N-k)!}\int\mathrm{d}x_{k+1}\cdots\int\mathrm{d}x_N p(x_1,x_2,\cdots,x_N) \quad (6.1.2)$$

のように定義される．規格化定数 c_N は，

$$c_N = \int\mathrm{d}x_1\cdots\int\mathrm{d}x_N p(x_1,x_2,\cdots,x_N) \quad (6.1.3)$$

によって与えられる．積分範囲は，アンサンブルによって異なる．ガウス型アンサンブルの固有値については，全実数区間について積分する．カイラルガウス型アンサンブルの固有値は正の値をとるので，積分範囲は，正の実数区間になる．

まず，Vandermonde 行列式の関係

$$\prod_{j>l}^{N}(x_j-x_l) = \det[(x_l)^{j-1}]_{j,l=1,2,\cdots,N} \quad (6.1.4)$$

に着目する．右辺の行列式において，各行に任意の数をかけて他の行に加えても行列式の値は変わらないので，

$$\prod_{j>l}^{N}(x_j-x_l) = \det[C_{j-1}(x_l)]_{j,l=1,2,\cdots,N} \quad (6.1.5)$$

とすることができる．ここで，$C_j(x)$ は，x^j を最高次の項とする任意の多項式である．最高次の項の係数が 1 であることは重要で，それ以外の項の係数は，(いまのところ) 何でもかまわない．これにより，任意の (ゼロでない) 数 h_j に対して，

$$\prod_{j<l}^{N} |x_j - x_l|^2 = \prod_{n=0}^{N-1} h_n \left(\det[(1/\sqrt{h_{j-1}})C_{j-1}(x_l)]_{j,l=1,2,\cdots,N}\right)^2 \tag{6.1.6}$$

が成立することがわかる．行列 A の行列式の 2 乗に対しては，関係 $(\det A)^2 = \det(A^{\mathrm{T}}A)$ が成り立つので，これをさらに書き直して，

$$\prod_{j<l}^{N} |x_j - x_l|^2 = \prod_{n=0}^{N-1} h_n \det\left[\sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{h_n} C_n(x_j)C_n(x_l)\right]_{j,l=1,2,\cdots,N} \tag{6.1.7}$$

とできる．最後に，重み関数 $w(x)$ を行列式の中に含めると，全固有値分布関数は，

$$p(x_1,\cdots,x_N) = \prod_{n=0}^{N-1} h_n \det[K(x_j,x_l)]_{j,l=1,2,\cdots,N} \tag{6.1.8}$$

の形をとることがわかる．ただし，

$$K(x,y) = \sqrt{w(x)w(y)} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{h_n} C_n(x)C_n(y) \tag{6.1.9}$$

である．

ここで，$C_n(x) = x^n + \cdots$ は，重み関数 $w(x)$ に対する直交多項式であるとしよう．すなわち，

$$\int w(x)C_m(x)C_n(x)\mathrm{d}x = h_n\delta_{mn} \tag{6.1.10}$$

の関係を満たすことを要請する．積分範囲は，先に述べた固有値の積分範囲と同じである．これにより，定数 h_n も同時に定まる．このような直交関係を

満たす $C_n(x)$ は，Schmidt の直交化法によって構成することができる．また，行列式表示

$$C_n(x) = \mathcal{D}_n^{-1} \begin{vmatrix} x^n & \langle x^{2n-1} \rangle & \cdots & \langle x^n \rangle \\ x^{n-1} & \langle x^{2n-2} \rangle & \cdots & \langle x^{n-1} \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & \langle x^n \rangle & \cdots & \langle x \rangle \\ 1 & \langle x^{n-1} \rangle & \cdots & \langle 1 \rangle \end{vmatrix} \tag{6.1.11}$$

もある．ここで，定義

$$\langle f(x) \rangle = \int w(x) f(x) \mathrm{d}x \tag{6.1.12}$$

を使った．また，定数 $\mathcal{D}_n$ は，

$$\mathcal{D}_n = \begin{vmatrix} \langle x^{2n-2} \rangle & \cdots & \langle x^{n-1} \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x^n \rangle & \cdots & \langle x \rangle \\ \langle x^{n-1} \rangle & \cdots & \langle 1 \rangle \end{vmatrix} \tag{6.1.13}$$

である．

直交多項式 $C_n(x)$ は，3 項漸化式

$$xC_n(x) = C_{n+1}(x) + a_n C_n(x) + b_n C_{n-1}(x) \tag{6.1.14}$$

を満たす．これは，ガウス型に限らない一般の重み関数 $w(x)$ に対して成り立つ関係である．これを証明するために，$xC_n(x)$ を $C_n(x)$ で展開し，

$$xC_n(x) = \sum_{j=0}^{n+1} \alpha_j C_j(x) \tag{6.1.15}$$

とおく．このとき，$C_n(x)$ と $n-1$ 以下の次数の多項式との内積はゼロになるから，

$$h_j \alpha_j = \langle (xC_n(x)) C_j(x) \rangle = \langle C_n(x)(xC_j(x)) \rangle = 0, \quad j = 0, 1, 2, \cdots, n-2 \tag{6.1.16}$$

である．したがって，漸化式の成立が証明された．また，$j = n-1$ のときを考えると，$b_n = h_n/h_{n-1}$ であることがわかる．

(6.1.9) で定義された $K(x,y)$ に対しては，次の関係 (Christoffel-Darboux の公式)

$$K(x,y) = \sqrt{w(x)w(y)}\frac{1}{h_{N-1}}\frac{C_N(x)C_{N-1}(y) - C_{N-1}(x)C_N(y)}{x-y} \quad (6.1.17)$$

があり，n についての和を解消することができる．これも，一般の重み関数 $w(x)$ に対して成立する関係である．これを証明するためには，数学的帰納法を使う．まず，証明すべき式 (6.1.17) に，3 項漸化式から得られる関係

$$C_{N-1}(x) = \frac{h_{N-1}}{h_N}(xC_N(x) - C_{N+1}(x) - a_N C_N(x)) \quad (6.1.18)$$

を代入すると，

$$\begin{aligned} K(x,y) &= -\sqrt{w(x)w(y)}\frac{1}{h_N}C_N(x)C_N(y) \\ &\quad + \sqrt{w(x)w(y)}\frac{1}{h_N}\frac{C_{N+1}(x)C_N(y) - C_N(x)C_{N+1}(y)}{x-y} \end{aligned} \quad (6.1.19)$$

を得る．これは，

$$\begin{aligned} &\sqrt{w(x)w(y)}\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{h_n}C_n(x)C_n(y) \\ &= \sqrt{w(x)w(y)}\frac{1}{h_N}\frac{C_{N+1}(x)C_N(y) - C_N(x)C_{N+1}(y)}{x-y} \end{aligned} \quad (6.1.20)$$

を意味する．すなわち，証明すべき式が成立するならば，それは，N が 1 つ大きいときにも成立する．一方，$N=1$ のときには，$C_0(x)=1$ なので，

$$\begin{aligned} K(x,y) &= \sqrt{w(x)w(y)}\frac{1}{h_0} \\ &= \sqrt{w(x)w(y)}\frac{1}{h_0}\frac{C_1(x) - C_1(y)}{x-y} \end{aligned} \quad (6.1.21)$$

を得る．したがって，数学的帰納法により，(6.1.17) の成立が示された．

さて，ここで，相関関数の行列式表示を導くことにしよう．まず，直交関係 (6.1.10) より，

$$\int K(x,y)K(y,z)\mathrm{d}x = K(x,z) \tag{6.1.22}$$

および

$$\int K(x,x)\mathrm{d}x = N \tag{6.1.23}$$

が成立することがわかる．このとき，行列式

$$D_n = \det[K(x_j, x_l)]_{j,l=1,2,\cdots,n} \tag{6.1.24}$$

を定義する．さらに $D_n(\mu,\nu)$ は，行列 $[K(x_j,x_l)]_{j,l=1,2,\cdots,n}$ から第 μ 行と第 ν 列を除いてつくった $(n-1)\times(n-1)$ 行列の行列式であるとしよう．このとき，行列式 D_n を第 n 列について展開すると，

$$D_n = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{n+j}D_n(j,n)K(x_j,x_n) \tag{6.1.25}$$

の形に書ける．次に，$D_n(\mu,\nu;\sigma,\tau)$ は，行列 $[K(x_j,x_l)]_{j,l=1,2,\cdots,n}$ から第 μ 行と第 ν 列を除いた上で，さらに第 σ 行と第 τ 行を除いた $(n-2)\times(n-2)$ 行列の行列式であるとしよう ($\sigma\neq\mu$, $\tau\neq\nu$)．このとき，行列式 $D_n(j,n)$ を第 $n-1$ 行について展開すると，

$$\begin{aligned} D_n = &\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1}(-1)^{j+l-1}D_n(j,n;n,l)K(x_j,x_n)K(x_n,x_l) \\ &+ D_n(n,n)K(x_n,x_n) \end{aligned} \tag{6.1.26}$$

を得る．両辺を x_n について積分すると，関係 (6.1.22) と (6.1.23) を使って，

$$\begin{aligned} \int D_n\mathrm{d}x_n = &\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{l=1}^{n-1}(-1)^{j+l-1}D_n(j,n;n,l)K(x_j,x_l) \\ &+ D_n(n,n)N \end{aligned} \tag{6.1.27}$$

を導くことができる．ところが，右辺の l についての和は，行列式 $D_n(n,n)$ の第 j 行についての行展開を与えるから，結局，

$$\int D_n \mathrm{d}x_n = (N-n+1)D_n(n,n) = (N-n+1)D_{n-1} \tag{6.1.28}$$

となる．すなわち，行列式 D_n を変数 x_n について積分することにより，第 n 行と第 n 列を除いた行列の行列式 D_{n-1} の定数倍が得られる．この関係を続けて使い，順次 $x_N, x_{N-1}, \cdots$ についての積分を評価していくと，相関関数は，

$$\rho(x_1, \cdots, x_k) = \det[K(x_j, x_l)]_{j,l=1,2,\cdots,k} \tag{6.1.29}$$

の形に書けることがわかる．また，すべての変数についての積分を評価することにより，規格化定数 c_N としては，

$$c_N = N! \prod_{n=0}^{N-1} h_n \tag{6.1.30}$$

を得る．

このように，ユニタリアンサンブルに対しては，対応する直交多項式を導入することにより，簡単に相関関数の行列式表示が得られた．それに対して，直交アンサンブルとシンプレクティックアンサンブルの固有値相関関数は，四元数行列式の形に書けることが知られている．また，それらのアンサンブルからユニタリアンサンブルへの遷移を記述する動的相関関数も，四元数行列式表示をもつ．以下で解説するように，ユニタリアンサンブルの場合ほど簡単ではないが，基本的に類似の議論により，四元数行列式表示を導出することができる [94, 96]．

6.2　四元数行列式

動的相関関数を評価するために，E.H. Moore によって考案された四元数行列の行列式を導入しよう [90, 91]．第 1 章で導入した Study の行列式 と

は異なっていることに注意すべきである（さまざまな四元数行列式とその相互関係については，文献 [7] を参照）．Moore の四元数行列式は，1 つの行およびそれに対応する列を除いて自己双対であるような $N \times N$ 四元数行列 Q に対して定義される．そのような行列 Q の要素 $[Q]_{jl}$ を q_{jl} と書くとき，ある整数 k に対して，

$$q_{jl} = \bar{q}_{lj}, \quad j \neq k,\ l \neq k \tag{6.2.1}$$

が満たされる．このとき，Q の行列式 Tdet Q は，次数 N についての漸化関係により定義される．すなわち，$N = 1$ に対しては，

$$\text{Tdet } Q = q_{11} \tag{6.2.2}$$

と定義し，一方，$N > 1$ に対しては，

$$\text{Tdet } Q = \sum_{l=1}^{N} \epsilon_{kl} q_{kl} \text{Tdet } Q(k,l) \tag{6.2.3}$$

とする．ここで，

$$\epsilon_{kl} = \begin{cases} -1, & l \neq k, \\ 1, & l = k \end{cases} \tag{6.2.4}$$

である．$(N-1) \times (N-1)$ 行列 $Q(k,l)$ は，Q から以下の手続きによってつくられる．

(1) l 番目の列の要素を，対応する k 番目の列の要素で置き換える．

(2) k 番目の行と k 番目の列を消去する．

行列 $Q(k,l)$ も，1 つの行およびそれに対応する列を除いて自己双対なので，漸化関係によって，任意次数の行列式が定義される．

この定義により，四元数行列式の k 番目の行に対する展開が与えられる．Q の要素が可換であれば，それは普通の行列式の行展開になる．ちなみに，このような，行展開に基づく漸化関係によって任意次数の行列式を定義するやり方は，江戸時代の日本において，井関知辰によって発見された [67]．

次に，サイクル和 $S(Q)$ を，四元数行列式と同様，漸化関係により定義する．$N\times N$ 行列 Q が，1 つの行およびそれに対応する列を除いて自己双対であるとしよう．このとき，Q の要素を q_{jl} と書くならば，$N=1$ のとき，

$$S(Q)=q_{11} \tag{6.2.5}$$

であり，$N>1$ に対しては，

$$S(Q)=\sum_{b\neq a} q_{ab}S(Q(a,b)) \tag{6.2.6}$$

である．この定義を繰り返し使うことにより，一般の N に対して，

$$S(Q)=\sum_{P} q_{ab}q_{bc}\cdots q_{da} \tag{6.2.7}$$

を得る．ただし，P は，集合 $\{1,2,\cdots,N\}$ の中から a を除いた集合の置換

$$P=(b,\cdots,d) \tag{6.2.8}$$

である．このとき，以下の **予備定理** *6.1* が得られる [34].

予備定理 *6.1*　Q が自己双対行列のときには，$S(Q)$ は，a の選び方によらないスカラーになる．

証明　Q が自己双対であるとして，a を a' に置き換えたときのサイクル和を $S'(Q)$ としよう．サイクル和 $S(Q)$ の中で，置換 P に対応する項は，$\alpha\beta$ の形をとる．ただし，

$$\alpha=q_{ab}q_{bc}\cdots q_{sa'},\quad \beta=q_{a't}q_{tu}\cdots q_{da} \tag{6.2.9}$$

とする．P の順序を逆にした置換

$$P^r=(d,\cdots,b) \tag{6.2.10}$$

に対応する項は，$\bar{\beta}\bar{\alpha}$ の形をとる．$N>2$ のときには，これらは別の項なので，和 $s=\alpha\beta+\bar{\beta}\bar{\alpha}$ の形でサイクル和に寄与する．明らかに，この和はス

カラーである．同様に，サイクル和 $S'(Q)$ の中には項 $\beta\alpha$ と $\bar{\alpha}\bar{\beta}$ が現れ，その和 s' はスカラーになる．関係 (1.1.9) により，$\mathrm{tr}\, s = \mathrm{tr}\, s'$ なので，$s = s'$ が導かれる．したがって，$S(Q) = S'(Q)$ であり，$S(Q)$ は a の選び方によらないスカラーである．これは，明らかに $N = 2$ のときにも成り立つ．

（証明終）

サイクル和 $S(Q)$ を使うと，次の **予備定理** *6.2* で示すように，四元数行列式の閉じた表式が得られる [34]．

予備定理 *6.2*　整数の集合 $\{1, 2, \cdots, N\}$ を m 個の部分集合 $G_1, \cdots, G_m$ に分割するやり方を G と表すことにする．Q の要素 q_{jl} のうち，j と l の両方が G_r に入っているものでつくられる部分行列を $Q(G_r)$ と書く．自己双対性の破れている行（列）は，第 k 行（列）であるとし，G_1 が k を含むとする．すなわち，$Q(G_r)$ は，$r = 2, 3, \cdots, m$ に対して，自己双対である．このとき，

$$\mathrm{Tdet}\ Q = \sum_{G} (-1)^{N-m} \prod_{r=1}^{m} S(Q(G_r)) \tag{6.2.11}$$

が成立する．m 個のサイクル和のうち，$m-1$ 個はスカラーなので，右辺はサイクル和をかける順序によらない．

<u>証明</u>　数学的帰納法によって証明する．$N = 1$ のときに成立することは明らかである．そこで，Q が $(N-1) \times (N-1)$ 行列のときに，成立を仮定する．(6.2.11) の右辺の G についての和を 2 つに分けよう．1 つは，G_1 が k だけからなる項についての和で，これを Σ_1 と書き，残りの項についての和を Σ_2 とする．

まず，Σ_1 を書き下すと，

$$\Sigma_1 = \sum_{\substack{G \\ (G_1 = \{k\})}} (-1)^{N-m} q_{kk} \prod_{r=2}^{m} S(Q(G_r)) \tag{6.2.12}$$

である．ここで，集合 $\{1, 2, \cdots, N\}$ から k を除いた集合を $m-1$ 個の部分集合 $G'_1, \cdots, G'_{m-1}$ に分割するやり方を G' と表すことにしよう．すると，

Σ_1 は,

$$\Sigma_1 = q_{kk} \sum_{G'} (-1)^{(N-1)-(m-1)} \prod_{r=1}^{m-1} S(Q(G'_r)) \tag{6.2.13}$$

と書き直される．したがって，帰納法の仮定より，

$$\Sigma_1 = q_{kk} \mathrm{Tdet}\ Q(k,k) \tag{6.2.14}$$

を得る．

次に，Σ_2 を書き下すと，

$$\Sigma_2 = \sum_{\substack{G \\ (G_1 \neq \{k\})}} (-1)^{N-m} S(Q(G_1)) \prod_{r=2}^{m} S(Q(G_r)) \tag{6.2.15}$$

である． 因子 $S(Q(G_1))$ は，(6.2.6) を用いると，

$$S(Q(G_1)) = \sum_{l \neq k} q_{kl} S(Q(G_1)(k,l)) \tag{6.2.16}$$

のように展開される．これを Σ_2 の表式 (6.2.15) に代入すると，

$$\Sigma_2 = -\sum_{l \neq k} q_{kl} \sum_{\substack{G \\ (\{k,l\} \subset G_1)}} (-1)^{(N-1)-m} S(Q(k,l)(G_1)) \prod_{r=2}^{m} S(Q(k,l)(G_r)) \tag{6.2.17}$$

を得る．帰納法の仮定により，これは，

$$\Sigma_2 = -\sum_{l \neq k} q_{kl} \mathrm{Tdet}\ Q(k,l) \tag{6.2.18}$$

に等しい．

以上のことから，$\Sigma_1 + \Sigma_2$ は，(6.2.3) によって定義される Tdet Q に等しいことがわかる．これにより，**予備定理** *6.2* が証明された．（証明終）

予備定理 *6.2* より，以下の基本的な関係が得られる．

系 *6.1*

$$\mathrm{Tdet}(\bar{Q}) = \overline{(\mathrm{Tdet}\ Q)}. \tag{6.2.19}$$

証明　サイクル和の定義より，

$$S(\bar{Q}) = \overline{S(Q)} \tag{6.2.20}$$

となることを使えば，ただちに証明できる．（証明終）

系 *6.2*　Q が自己双対であれば，Tdet Q はスカラーになる．

証明　系 *6.1* より明らか．（証明終）

また，系 *6.1* により，Tdet Q を k 番目の列について展開できることがわかる．ただし，その場合，列の要素は右からかけられる．列展開のあからさまな表式は，

$$\mathrm{Tdet}\ Q = \sum_{l=1}^{N} \epsilon_{kl} \mathrm{Tdet}\ Q[k,l] q_{lk} \tag{6.2.21}$$

である．ここで，$Q[k,l]$ は，行列 Q から以下の手続きによってつくられる．$Q(k,l)$ と $Q[k,l]$ の違いに注意してもらいたい．

(1) l 番目の行の要素を，対応する k 番目の行の要素で置き換える．

(2) k 番目の行と k 番目の列を消去する．

もし，Q が自己双対であれば，次のような別の形の列展開が可能である．

予備定理 *6.3*　Q が自己双対ならば，

$$\mathrm{Tdet}\ Q = \sum_{l=1}^{N} \epsilon_{kl} \mathrm{Tdet}\ Q(l,k) q_{lk}. \tag{6.2.22}$$

証明　(6.2.3) の双対四元数を (6.2.22) と比較することにより，

$$\overline{\mathrm{Tdet}\ Q(k,l)} = \mathrm{Tdet}\ Q(l,k) \tag{6.2.23}$$

を証明すればよいことがわかる．Tdet $Q(k,l)$ を l 番目の行について展開し，Tdet $Q(l,k)$ を k 番目の列について展開すると，ただちにこの等式が得られる．（証明終）

また，自己双対 $N\times N$ 行列 Q に対しては，**予備定理** *6.2* において，すべてのサイクル和がスカラーになる．したがって，それぞれのサイクル和 $S(Q(G_r))$ を tr $S(Q(G_r))$ で置き換えることにより，以下のような表現を得る．

$$\text{Tdet } Q = \sum_P (-1)^{N-m} \prod_1^m \text{tr}(q_{ab}q_{bc}\cdots q_{da}). \tag{6.2.24}$$

ここで，P は行列要素の添え字 $\{1,2,\cdots,N\}$ の置換を表す．置換された添え字は，$(a\to b\to c\to\cdots\to d\to a)$ のように添え字が循環する形（サイクル）をつくるように並べ替えられている．1 つの項の中に含まれるサイクルの数を m としている．このとき，$(-1)^{N-m}$ は，P の符号（偶置換のとき 1 で奇置換のとき -1 ）になる．Q の要素が可換であれば，もちろん，これは普通の行列式の定義になる．

次に，自己双対 $N\times N$ 行列 Q の逆行列を考えてみよう．式 (6.2.11) において，要素 q_{lj} を含む項を考えよう．因子の順序を入れ替えることにより，これらの項の右端に q_{lj} が現れるようにできる．次に，これらの項を，右端の q_{lj} を除いた上で加え合わせる．その結果を，$N\times N$ 四元数行列 R の要素 R_{jl} としよう．すなわち，

$$R_{jl} = \sum_P \delta_{P(l)\ j}(-1)^{N-m} \prod_1^{m-1} \text{tr}(q_{ab}q_{bc}\cdots q_{da})q_{je}q_{ef}\cdots q_{gl} \tag{6.2.25}$$

である．このとき，(6.2.11) を使うと，

$$RQ = QR = (\text{Tdet } Q)I_N \tag{6.2.26}$$

であることがわかる（I_N は，$N\times N$ 四元数単位行列）．したがって，Tdet $Q\neq 0$ ならば，$(\text{Tdet } Q)^{-1}R$ は，Q の逆行列になる．

自己双対 $N \times N$ 行列 Q の各要素を 2×2 行列表現で置き換え，結果として得られる $2N \times 2N$ 行列を $\chi(Q)$ と書く．ここで， $2N \times 2N$ 行列 Z を，

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ -1 & 0 & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & \\ & & -1 & 0 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.2.27}$$

で定義する．$Z\chi(Q)$ は反対称行列であることがすぐにわかり，さらに，次のような関係を示すことができる [32].

予備定理 *6.4*　もし Q が自己双対ならば，

$$\mathrm{Tdet}\ Q = \mathrm{Pf}[Z\chi(Q)] \tag{6.2.28}$$

である．すなわち，自己双対行列の行列式は，$2N \times 2N$ 表現に Z をかけた行列のパフィアンになる．このパフィアンとの等価性は，四元数行列が自己双対のときだけに成り立つことに注意すべきである．

<u>証明</u>　A を $2N \times 2N$ 反対称行列，$u = (u_1, \cdots, u_{2N})$, $v = (v_1, \cdots, v_{2N})$ とするときに，以下の恒等式が成り立つことに注目する．

$$\det \begin{bmatrix} a & u \\ -v^{\mathrm{T}} & A \end{bmatrix} = \mathrm{Pf} \begin{bmatrix} 0 & a & u \\ -a & 0 & v \\ -u^{\mathrm{T}} & -v^{\mathrm{T}} & A \end{bmatrix} \mathrm{Pf}[A]. \tag{6.2.29}$$

この恒等式を証明するには，まず，両辺を 2 乗して，行列式の間の関係にする．両辺は，A の要素の多項式であるから，$\det A \neq 0$ のときに証明すれば十分である．左辺の行列式の中で，第 2 行ブロックに uA^{-1} をかけ，第 1 行から引くと，左辺は， $(a + uA^{-1}v^{\mathrm{T}}) \det A$ の 2 乗であることがわかる．一

方，右辺左側のパフィアンの中で，第 3 行ブロックに uA^{-1} をかけて第 1 行から引き，さらに，第 3 行ブロックに vA^{-1} をかけて第 2 行から引く．A^{-1} は反対称行列なので，$uA^{-1}u^{\mathrm{T}} = vA^{-1}v^{\mathrm{T}} = 0$ であることに注意すると，右辺も，$(a + uA^{-1}v^{\mathrm{T}}) \det A$ の 2 乗になる．最後に，両辺の平方根をとることにより，恒等式が証明される．このとき，符号の不定性は，$u = v = 0$ の特別な場合を考えることにより解決される．

Q から第 1 行と第 1 列を除いた自己双対行列を Q' としよう．恒等式 (6.2.29) を用いることにより，$\chi(Q)$ の逆行列は，

$$
\begin{aligned}
&\chi(Q)^{-1} \\
&= \frac{1}{\det \chi(Q)} \begin{bmatrix} \mathrm{Pf}[Z\chi(Q)]\mathrm{Pf}[Z\chi(Q')] & 0 & \cdots \\ 0 & \mathrm{Pf}[Z\chi(Q)]\mathrm{Pf}[Z\chi(Q')] & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{6.2.30}
$$

のように書ける．一方，(6.2.26) より，$\chi(Q)$ の逆行列を，$\chi(R)/\mathrm{Tdet}\ \mathrm{Q}$ と書くこともできる．すなわち，$\chi(Q)$ の逆行列に対して，2 つの表現が得られる．$R_{11} = \mathrm{Tdet}\ Q'$ に注意すると，$\chi(Q)$ の $(1,1)$ 成分に対する 2 つの表現の等価性から，

$$
\frac{\mathrm{Pf}[Z\chi(Q')]}{\mathrm{Pf}[Z\chi(Q)]} = \frac{\mathrm{Tdet}\ Q'}{\mathrm{Tdet}\ Q} \tag{6.2.31}
$$

となる．この関係を漸化式として用いると，

$$
\frac{\mathrm{Tdet}\ Q}{\mathrm{Pf}[Z\chi(Q)]} = \frac{\mathrm{Tdet}\ Q'}{\mathrm{Pf}[Z\chi(Q')]} = \cdots = \frac{\mathrm{Tdet}\ Q_{NN}}{\mathrm{Pf}[Z\chi(Q_{NN})]} = 1 \tag{6.2.32}
$$

により，**予備定理** *6.4* が証明される．（証明終）

さらに，Q が自己双対行列であるとき，$\mathrm{Tdet}\ Q$ は，以下のような不変性をもつ．

予備定理 *6.5*　$N \times N$ 自己双対行列 Q の要素 q_{jl} が，2×2 行列表示

$$
q_{jl} = \begin{bmatrix} q_{jl}^{11} & q_{jl}^{12} \\ q_{jl}^{21} & q_{jl}^{22} \end{bmatrix} \tag{6.2.33}
$$

をもつとする（自己双対性より，$q_{jl}^{11} = q_{lj}^{22}$, $q_{jl}^{12} = -q_{lj}^{12}$, $q_{jl}^{21} = -q_{lj}^{21}$ である）．一方，$N \times N$ 自己双対行列 Q' の要素 q'_{jl} の 2×2 行列表示は，

$$q'_{jl} = \begin{bmatrix} \dfrac{\alpha_j}{\alpha_l} q_{jl}^{11} & \alpha_j \alpha_l q_{jl}^{12} \\ \dfrac{1}{\alpha_j \alpha_l} q_{jl}^{21} & \dfrac{\alpha_l}{\alpha_j} q_{jl}^{22} \end{bmatrix} \tag{6.2.34}$$

であるとしよう（α_j は，任意のゼロでない複素数）．このとき，Tdet $Q =$ Tdet Q' である．

証明　証明すべき等式の両辺を **予備定理** *6.4* によってパフィアンの形に書く．すると，2.4 節で述べたパフィアンの性質 (2) より，両辺が等しいことがわかる．（証明終）

6.3　動的相関関数

四元数行列式の定義を述べたので，いよいよ相関関数の評価に移る．まず，全固有値分布関数を四元数行列式に書き直す必要がある．固有値の数 N が偶数の場合と奇数の場合に分けて，それを説明する．その後で，相関関数の定義に含まれる多重積分をどのようにして計算するかを示す．

第 2 章および第 5 章では，ガウス型アンサンブルおよびカイラルガウス型アンサンブルに対するブラウン運動モデルの全固有値分布関数として，N が偶数のときには（(2.4.64) および (5.4.28) 参照），

$$\begin{aligned} & p(x_1^1, \cdots, x_N^1; x_1^2, \cdots, x_N^2; \cdots; x_1^M, \cdots, x_N^M) \\ & = c \prod_{j=1}^{N} \sqrt{w(x_j^M)} \prod_{j>l}^{N} (x_j^M - x_l^M) \mathrm{Pf}[F_{jl}^{11}]_{j,l=1,2,\cdots,N} \\ & \times \prod_{m=1}^{M-1} \det[g_{jl}^{m+1\ m}]_{j,l=1,2,\cdots,N}, \end{aligned} \tag{6.3.1}$$

N が奇数のときには ((2.4.71) および (5.4.33) 参照),

$$\begin{aligned}
&p(x_1^1,\cdots,x_N^1;x_1^2,\cdots,x_N^2;\cdots;x_1^M,\cdots,x_N^M)\\
&=c\prod_{j=1}^{N}\sqrt{w(x_j^M)}\prod_{j>l}^{N}(x_j^M-x_l^M)\mathrm{Pf}\begin{bmatrix}[F_{jl}^{11}]_{j,l=1,2,\cdots,N} & [f_j^1]_{j=1,\cdots,N}\\ -[f_l^1]_{l=1,\cdots,N} & 0\end{bmatrix}\\
&\times\prod_{m=1}^{M-1}\det[g_{jl}^{m+1\ m}]_{j,l=1,2,\cdots,N} \qquad (6.3.2)
\end{aligned}$$

の形を導いた. 次に定義する動的相関関数は, 定数 c に依存しない. そこで, これ以後は, $c=1$ とおくことにする.

全固有値分布関数がわかっているとき, 対応する動的相関関数は,

$$\begin{aligned}
&\rho(x_1^1,\cdots,x_{m_1}^1;x_1^2,\cdots,x_{m_2}^2;\cdots;x_1^M,\cdots,x_{m_M}^M)\\
&=\frac{1}{c_N}\frac{(N!)^M}{\prod_{l=1}^{M}(N-m_l)!}\int \mathrm{d}x_{m_1+1}^1\cdots\int \mathrm{d}x_N^1\cdots\int \mathrm{d}x_{m_M+1}^M\cdots\int \mathrm{d}x_N^M\\
&\times p(x_1^1,\cdots,x_N^1;x_1^2,\cdots,x_N^2;\cdots;x_1^M,\cdots,x_N^M) \qquad (6.3.3)
\end{aligned}$$

のように定義される. ここで, 規格化定数 c_N は,

$$\begin{aligned}
c_N=&\int \mathrm{d}x_1^1\cdots\int \mathrm{d}x_N^1\cdots\int \mathrm{d}x_1^M\cdots\int \mathrm{d}x_N^M\\
&\times p(x_1^1,\cdots,x_N^1;x_1^2,\cdots,x_N^2;\cdots;x_1^M,\cdots,x_N^M) \qquad (6.3.4)
\end{aligned}$$

によって与えられる. 異なる時刻にある固有値の間の相関 (動的相関) も評価できる一般的な形になっていることに注意してほしい.

N が偶数の場合

まず, 行列 D^{mn}, I^{mn}, S^{mn} を,

$$\begin{aligned}
D_{jl}^{mn}&=D(x_j^m,x_l^n;\tau_m,\tau_n),\\
I_{jl}^{mn}&=I(x_j^m,x_l^n;\tau_m,\tau_n),\\
S_{jl}^{mn}&=S(x_j^m,x_l^n;\tau_m,\tau_n) \qquad (6.3.5)
\end{aligned}$$

によって導入する．ただし，

$$
\begin{aligned}
&D(x,y;\tau,\tau') \\
&= \sqrt{w(x)w(y)} \sum_{k=0}^{(N/2)-1} \frac{1}{r_k(\tau')} \Big[\mathrm{e}^{-\gamma_{2k}(\tau'-\tau)} R_{2k}(x;\tau) R_{2k+1}(y;\tau') \\
&- \mathrm{e}^{-\gamma_{2k+1}(\tau'-\tau)} R_{2k+1}(x;\tau) R_{2k}(y;\tau') \Big], \qquad (6.3.6)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&I(x,y;\tau,\tau') \\
&= -\sum_{k=0}^{(N/2)-1} \frac{1}{r_k(\tau')} \Big[\mathrm{e}^{-\gamma_{2k}(\tau'-\tau)} \Phi_{2k}(x;\tau) \Phi_{2k+1}(y;\tau') \\
&- \mathrm{e}^{-\gamma_{2k+1}(\tau'-\tau)} \Phi_{2k+1}(x;\tau) \Phi_{2k}(y;\tau') \Big] \\
&+ F(x,y;\tau,\tau'), \qquad (6.3.7)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&S(x,y;\tau,\tau') \\
&= \sqrt{w(y)} \sum_{k=0}^{(N/2)-1} \frac{1}{r_k(\tau')} \Big[\mathrm{e}^{-\gamma_{2k}(\tau'-\tau)} \Phi_{2k}(x;\tau) R_{2k+1}(y;\tau') \\
&- \mathrm{e}^{-\gamma_{2k+1}(\tau'-\tau)} \Phi_{2k+1}(x;\tau) R_{2k}(y;\tau') \Big] \qquad (6.3.8)
\end{aligned}
$$

である．ここで，$R_k(x;\tau) = x^k + \cdots$ は，x の任意の k 次多項式とする．ただし，x の k 次の項の係数は 1 である．また，$\Phi_k(x;\tau)$ は，

$$
\Phi_k(x;\tau) = \int F(y,x;\tau,\tau) \sqrt{w(y)} R_k(y;\tau) \mathrm{d}y \qquad (6.3.9)
$$

で与えられる．関数 $F(x,y;\tau,\tau')$ は，(2.4.67) または (2.4.68) によって定義されている．次のような対称性

$$
D_{jl}^{mn} = -D_{lj}^{nm}, \qquad (6.3.10)
$$

$$
I_{jl}^{mn} = -I_{lj}^{nm}, \qquad (6.3.11)
$$

$$
F_{jl}^{mn} = -F_{lj}^{nm} \qquad (6.3.12)
$$

があることに注意せよ．さらに，

$$\tilde{S}_{jl}^{mn} = \begin{cases} S(x_j^m, x_l^n; \tau_m, \tau_n), & m \le n, \\ \tilde{S}(x_j^m, x_l^n; \tau_m, \tau_n), & m > n \end{cases} \tag{6.3.13}$$

も定義しておく．ただし，

$$\tilde{S}(x, y; \tau, \tau') = S(x, y; \tau, \tau') - g(x, y; \tau - \tau') \tag{6.3.14}$$

である．

ここで，接続行列 μ^{mn} と λ^{mn} を，

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\gamma_k \tau_m} \sqrt{w(x_j^m)} R_k(x_j^m; \tau_m) &= \sum_{l=1}^{N} \mu_{jl}^{mn} \mathrm{e}^{\gamma_k \tau_n} \sqrt{w(x_l^n)} R_k(x_l^n; \tau_n), \\ \mathrm{e}^{\gamma_k \tau_m} \Phi_k(x_j^m; \tau_m) &= -\sum_{l=1}^{N} \lambda_{jl}^{mn} \mathrm{e}^{\gamma_k \tau_n} \sqrt{w(x_l^n)} R_k(x_l^n; \tau_n) \end{aligned} \tag{6.3.15}$$

によって導入しよう．当然，接続行列は，x_j^m や x_l^n に依存する．接続行列について，次の関係があることは容易にわかる．

$$\mu^{mp} D^{pn} = D^{mn}, \tag{6.3.16}$$

$$\lambda^{mp} D^{pn} = -S^{mn}, \tag{6.3.17}$$

$$\lambda^{mp} D^{pq} (\lambda^{nq})^{\mathrm{T}} - F^{mn} = -I^{mn}. \tag{6.3.18}$$

さて，ここで次の重要な定理を述べることができる．

定理 *6.1*　全固有値分布関数 (6.3.1) は，以下のように，四元数行列式の形に書ける．

$$\begin{aligned} &p(x_1^1, \cdots, x_N^1; \cdots; x_1^M, \cdots, x_N^M) \\ &= \prod_{j=1}^{N/2} r_{j-1}(\tau_M) \mathrm{Tdet}[B^{\mu\nu}]_{\mu,\nu=1,2,\cdots,M}. \end{aligned} \tag{6.3.19}$$

各ブロック $B^{\mu\nu}$ は，$N \times N$ 四元数行列である．その四元数要素は，2×2 行列表現を使うと，

$$B_{jl}^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \tilde{S}_{jl}^{\mu\nu} & I_{jl}^{\mu\nu} \\ D_{jl}^{\mu\nu} & \tilde{S}_{lj}^{\nu\mu} \end{bmatrix}, \quad j, l = 1, 2, \cdots, N \tag{6.3.20}$$

のように書ける．

<u>証明</u>　(6.3.1) の中の差積は，Vandermonde 行列式

$$\prod_{j>l}^{N} (x_j^M - x_l^M) = \det[(x_l^M)^{j-1}]_{j,l=1,2,\cdots,N} \tag{6.3.21}$$

の形をしている．そこで，

$$\begin{aligned} \prod_{j>l}^{N} (x_j^M - x_l^M) &= \det[R_{j-1}^M(x_l^M)]_{j,l=1,2,\cdots,N} \\ &= \sum_P (-1)^P \prod_{j=1}^{N} R_{j-1}^M(x_{P(j)}^M) \\ &= \sum_P (-1)^P \prod_{j=1}^{N/2} R_{2j-2}^M(x_{P(2j-1)}^M) R_{2j-1}^M(x_{P(2j)}^M) \\ &= \sum_P (-1)^P \prod_{j=1}^{N/2} R_{2S_j-2}^M(x_{P(2j-1)}^M) R_{2S_j-1}^M(x_{P(2j)}^M) \end{aligned} \tag{6.3.22}$$

と書き直せる．ここで，$S_1, S_2, \cdots, S_{N/2}$ は，$1, 2, \cdots, N/2$ の中から，重複なく選び出してきた数である．どのような選び方をしても，式全体の値は変わらない．また，もし重複（つまり，$S_j = S_l$，$j \neq l$）のある選び方をすると，式全体がゼロになる．したがって，さらに変形を進めて，

$$
\begin{aligned}
&\prod_{j>l}^{N}(x_j^M - x_l^M) \\
&= \frac{1}{(N/2)!}\sum_{S_1=1}^{N/2}\cdots\sum_{S_{N/2}=1}^{N/2}\sum_{P}(-1)^P\prod_{j=1}^{N/2}R_{2S_j-2}^M(x_{P(2j-1)}^M)R_{2S_j-1}^M(x_{P(2j)}^M) \\
&= \frac{\prod_{j=1}^{N/2}r_{j-1}(\tau_M)}{(N/2)!}\sum_{P}{}'(-1)^P\prod_{j=1}^{N/2}\sum_{n=1}^{N/2}\frac{1}{r_{n-1}(\tau_M)} \\
&\times\left[R_{2n-2}^M(x_{P(2j-1)}^M)R_{2n-1}^M(x_{P(2j)}^M) - R_{2n-2}^M(x_{P(2j)}^M)R_{2n-1}^M(x_{P(2j-1)}^M)\right] \\
&= \prod_{j=1}^{N/2}r_{j-1}\mathrm{Pf}[D^{MM}]
\end{aligned}
\tag{6.3.23}
$$

を得る．このことから，

$$
\begin{aligned}
&\prod_{j=1}^{N/2}\frac{1}{r_{j-1}(\tau_M)}p(x_1^1,\cdots,x_N^1;\cdots;x_1^M,\cdots,x_N^M) \\
&= \prod_{j=1}^{N/2}\frac{1}{r_{j-1}(\tau_M)}\prod_{j>l}^{N}(x_j^M - x_l^M)\mathrm{Pf}[F_{jl}^{11}]_{j,l=1,2,\cdots,N} \\
&\times\prod_{m=1}^{M-1}\det[g_{jl}^{m+1\ m}]_{j,l=1,2,\cdots,N} \\
&= (-1)^{N/2}\mathrm{Pf}\begin{bmatrix} D^{MM} & 0 \\ 0 & -F^{11}\end{bmatrix}\prod_{m=1}^{M-1}\det[g_{jl}^{m+1\ m}]_{j,l=1,2,\cdots,N} \\
&= (-1)^{NM/2} \\
&\times\mathrm{Pf}\begin{bmatrix} D^{MM} & 0 \\ 0 & -F^{11}\end{bmatrix}\prod_{m=1}^{M-1}\mathrm{Pf}\begin{bmatrix} 0 & -(g^{m+1\ m})^{\mathrm{T}} \\ g^{m+1\ m} & 0\end{bmatrix}
\end{aligned}
\tag{6.3.24}
$$

であることがわかる．この式 (6.3.24) の最後の行に現れている M 個のパフィアンの積は，1 つのパフィアンにまとめて，

$$
\mathrm{Pf}\begin{bmatrix}
D^{MM} & 0 & & & & & \\
0 & -F^{11} & & & & & \\
& & 0 & -(g^{21})^{\mathrm{T}} & & & \\
& & g^{21} & 0 & & & \\
& & & & \ddots & & \\
& & & & & 0 & -(g^{M\ M-1})^{\mathrm{T}} \\
& & & & & g^{M\ M-1} & 0
\end{bmatrix}
\tag{6.3.25}
$$

と書ける．さらに，このパフィアンは，値を変えない変形を加えることにより，$\mathrm{Pf}[\Xi^{\mu\nu}]$，$\mu,\nu=1,2,\cdots,M$ に変えることができる．ここで，各ブロック $\Xi^{\mu\nu}$ は，

$$
\Xi^{\mu\nu} = \begin{cases}
\begin{bmatrix} D^{MM} & 0 \\ 0 & -F^{11} \end{bmatrix}, & \mu=\nu=1, \\
\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -F^{\mu\nu} \end{bmatrix}, & 1=\nu<\mu\le M,\ 1=\mu<\nu\le M, \\
\begin{bmatrix} 0 & -(g^{\mu\ \mu-1})^{\mathrm{T}} \\ g^{\mu\ \mu-1} & -F^{\mu\mu} \end{bmatrix}, & 1<\mu=\nu\le M, \\
\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ g^{\mu\ \nu-1} & -F^{\mu\nu} \end{bmatrix}, & 1<\nu<\mu\le M, \\
\begin{bmatrix} 0 & -(g^{\mu\ \nu-1})^{\mathrm{T}} \\ 0 & -F^{\mu\nu} \end{bmatrix}, & 1<\mu<\nu\le M
\end{cases}
\tag{6.3.26}
$$

のように定義される．

次に，$2MN\times 2MN$ 行列 $[\Xi^{\mu\nu}]$, $\mu,\nu=1,2,\cdots,M$ は，$2M\times 2M$ 個の $N\times N$ 行列のブロックに分かれているとみなすことにしよう．このとき，以下の操作を，$K=1,2,\cdots,M-1$ について順番に行う．

(1) 第 1 の行ブロックに行列 μ^{KM} を左からかけ，$2K+1$ 番目の行ブロックに加える．次に，第 1 の列ブロックに転置行列 $(\mu^{KM})^{\mathrm{T}}$ を右からかけ，

$2K+1$ 番目の列ブロックに加える．

そしてさらに，以下の操作を， $K=1,2,\cdots,M$ について順番に行う．

(2) 第 1 の行ブロックに行列 λ^{KM} を左からかけ，$2K$ 番目の行ブロックに加える．次に，第 1 の列ブロックに転置行列 $(\lambda^{KM})^{\mathrm{T}}$ を右からかけ，$2K$ 番目の列に加える．

これらの操作は，パフィアンの値を変えず，$\mathrm{Pf}[\Lambda^{\mu\nu}]$, $\mu,\nu=1,2,\cdots,M$ を与える．各ブロック $\Lambda^{\mu\nu}$ の定義は，

$$\Lambda^{\mu\nu}=\begin{cases}\begin{bmatrix} D^{MM} & (\tilde{S}^{1M})^{\mathrm{T}} \\ -\tilde{S}^{1M} & -I^{11}\end{bmatrix}, & \mu=\nu=1, \\ \begin{bmatrix} D^{\mu-1\ M} & (\tilde{S}^{1\ \mu-1})^{\mathrm{T}} \\ -\tilde{S}^{\mu\ M} & -I^{\mu\ 1}\end{bmatrix}, & 1=\nu<\mu\le M, \\ \begin{bmatrix} D^{M\ \mu-1} & (\tilde{S}^{\mu\ M})^{\mathrm{T}} \\ -\tilde{S}^{1\ \mu-1} & -I^{1\ \mu}\end{bmatrix}, & 1=\mu<\nu\le M, \\ \begin{bmatrix} D^{\mu-1\ \nu-1} & (\tilde{S}^{\nu\ \mu-1})^{\mathrm{T}} \\ -\tilde{S}^{\mu\ \nu-1} & -I^{\mu\nu}\end{bmatrix}, & 1<\mu,\nu\le M\end{cases} \tag{6.3.27}$$

となる．さらに，適当に列と行の入れ替えを行うことにより，$\mathrm{Pf}[\Lambda^{\mu\nu}]$ の $(-1)^{NM/2}$ 倍は，$\mathrm{Pf}[A^{\mu\nu}]$, $\mu,\nu=1,2,\cdots,M$ に等しくなることがわかる．ここで，各ブロック $A^{\mu\nu}$ は $2N\times 2N$ 行列で，2×2 ブロック $A^{\mu\nu}_{jl}$, $j,l=1,2,\cdots,N$ からなる．そして，行列 $A^{\mu\nu}_{jl}$ の定義は，

$$A^{\mu\nu}_{jl}=\begin{bmatrix} D^{\mu\nu}_{jl} & \tilde{S}^{\nu\mu}_{lj} \\ -\tilde{S}^{\mu\nu}_{jl} & -I^{\mu\nu}_{jl}\end{bmatrix},\quad j,l=1,2,\cdots,N \tag{6.3.28}$$

で与えられる．これより，**予備定理** *6.4* を使うと，四元数行列式表示 (6.3.19) が得られる． (証明終)

ここで，多項式 $R_k(x;\tau)=x^k+\cdots$ の形を決めよう．まず，反対称内積を，

$$\langle f(x),g(y)\rangle=\int \mathrm{d}x\int \mathrm{d}y\sqrt{w(x)w(y)}F(y,x;\tau,\tau)f(y)g(x) \tag{6.3.29}$$

のように定義する．関数 $F(x,y;\tau,\tau')$ は，(2.4.67) または (2.4.68) によって与えられる．Schmidt の直交化の方法により，歪直交関係

$$\langle R_{2j}(x;\tau), R_{2l+1}(y;\tau)\rangle = -\langle R_{2l+1}(x;\tau), R_{2j}(y;\tau)\rangle = r_j\delta_{jl},$$
$$\langle R_{2j}(x;\tau), R_{2l}(y;\tau)\rangle = 0, \quad \langle R_{2j+1}(x;\tau), R_{2l+1}(y;\tau)\rangle = 0 \tag{6.3.30}$$

を満たす歪直交多項式として，$R_k(x;\tau)$ を定める．このとき，$R_k(x;\tau)$ の行列式表示は，

$$R_{2n}(x;\tau) = \mathcal{D}_n^{-1}\begin{vmatrix} x^{2n} & J^{2n\ 2n-1} & J^{2n\ 2n-2} & \cdots & J^{2n\ 0} \\ x^{2n-1} & J^{2n-1\ 2n-1} & J^{2n-1\ 2n-2} & \cdots & J^{2n-1\ 0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^0 & J^{0\ 2n-1} & J^{0\ 2n-2} & \cdots & J^{0\ 0} \end{vmatrix} \tag{6.3.31}$$

および

$$R_{2n+1}(x;\tau) = \mathcal{D}_n^{-1}\begin{vmatrix} x^{2n+1} & J^{2n+1\ 2n-1} & J^{2n+1\ 2n-2} & \cdots & J^{2n+1\ 0} \\ x^{2n-1} & J^{2n-1\ 2n-1} & J^{2n-1\ 2n-2} & \cdots & J^{2n-1\ 0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^0 & J^{0\ 2n-1} & J^{0\ 2n-2} & \cdots & J^{0\ 0} \end{vmatrix} + v_n R_{2n}(x) \tag{6.3.32}$$

で与えられる．ここで，

$$J^{mn} = \langle x^m, y^n\rangle \tag{6.3.33}$$

および

$$\mathcal{D}_n = \begin{vmatrix} J^{2n-1\ 2n-1} & J^{2n-1\ 2n-2} & \cdots & J^{2n-1\ 0} \\ J^{2n-2\ 2n-1} & J^{2n-2\ 2n-2} & \cdots & J^{2n-2\ 0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J^{0\ 2n-1} & J^{0\ 2n-2} & \cdots & J^{0\ 0} \end{vmatrix} \tag{6.3.34}$$

である．また，v_n は任意定数である．このように，$R_{2n+1}(x;\tau)$ の決め方には不定性があることに注意すべきである．

N が奇数の場合

多項式 $R_k^{\mathrm{odd}}(x;\tau)$ は，

$$\prod_{j>l}^{N}(x_j - x_l) = \det[R_{j-1}^{\mathrm{odd}}(x_l;\tau)]_{j,l=1,2,\cdots,N} \tag{6.3.35}$$

を満たしているとしよう．このとき，行列 D^{mn}, I^{mn} および S^{mn} を，

$$\begin{aligned} D_{jl}^{mn} &= D(x_j^m, x_l^n;\tau_m,\tau_n), \\ I_{jl}^{mn} &= I(x_j^m, x_l^n;\tau_m,\tau_n), \\ S_{jl}^{mn} &= S(x_j^m, x_l^n;\tau_m,\tau_n) \end{aligned} \tag{6.3.36}$$

によって導入する．ただし，

$$\begin{aligned} &D(x,y;\tau,\tau') \\ &= \sqrt{w(x)w(y)} \sum_{k=0}^{(N-3)/2} \frac{1}{r_k(\tau')} \Big[\mathrm{e}^{-\gamma_{2k}(\tau'-\tau)} R_{2k}^{\mathrm{odd}}(x;\tau) R_{2k+1}^{\mathrm{odd}}(y;\tau') \\ &- \mathrm{e}^{-\gamma_{2k+1}(\tau'-\tau)} R_{2k+1}^{\mathrm{odd}}(x;\tau) R_{2k}^{\mathrm{odd}}(y;\tau') \Big], \end{aligned} \tag{6.3.37}$$

$$\begin{aligned} &I(x,y;\tau,\tau') \\ &= -\sum_{k=0}^{(N-3)/2} \frac{1}{r_k(\tau')} \Big[\mathrm{e}^{-\gamma_{2k}(\tau'-\tau)} \Phi_{2k}^{\mathrm{odd}}(x;\tau) \Phi_{2k+1}^{\mathrm{odd}}(y;\tau') \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \mathrm{e}^{-\gamma_{2k+1}(\tau'-\tau)}\Phi^{\mathrm{odd}}_{2k+1}(x;\tau)\Phi^{\mathrm{odd}}_{2k}(y;\tau')\Big] \\
&+ \left[\frac{1}{s_{N-1}(\tau)}\Phi^{\mathrm{odd}}_{N-1}(x;\tau)f(y;\tau') - \frac{1}{s_{N-1}(\tau')}\Phi^{\mathrm{odd}}_{N-1}(y;\tau')f(x;\tau)\right] \\
&+ F(x,y;\tau,\tau'),
\end{aligned}
\tag{6.3.38}
$$

$$
\begin{aligned}
&S(x,y;\tau,\tau') \\
&= \sqrt{w(y)}\sum_{k=0}^{(N-3)/2}\frac{1}{r_k(\tau')}\Big[\mathrm{e}^{-\gamma_{2k}(\tau'-\tau)}\Phi^{\mathrm{odd}}_{2k}(x;\tau)R^{\mathrm{odd}}_{2k+1}(y;\tau') \\
&- \mathrm{e}^{-\gamma_{2k+1}(\tau'-\tau)}\Phi^{\mathrm{odd}}_{2k+1}(x;\tau)R^{\mathrm{odd}}_{2k}(y;\tau')\Big] \\
&+ f^m_j\frac{1}{s_{N-1}(\tau')}\sqrt{w(y)}R^{\mathrm{odd}}_{N-1}(y,\tau')
\end{aligned}
\tag{6.3.39}
$$

である．$\Phi^{\mathrm{odd}}_k(x;\tau)$ は，

$$
\Phi^{\mathrm{odd}}_k(x;\tau) = \int F(y,x;\tau,\tau)\sqrt{w(y)}R^{\mathrm{odd}}_k(y;\tau)\mathrm{d}y \tag{6.3.40}
$$

で与えられる．さらに，行列 $\tilde{S}^{mn}$ を，

$$
\tilde{S}^{mn}_{jl} = \begin{cases} S(x^m_j, x^n_l;\tau_m,\tau_n), & m \le n, \\ \tilde{S}(x^m_j, x^n_l;\tau_m,\tau_n), & m > n, \end{cases} \tag{6.3.41}
$$

$$
\tilde{S}(x,y;\tau,\tau') = S(x,y;\tau,\tau') - g(x,y;\tau-\tau') \tag{6.3.42}
$$

で定義する．また，列ベクトル R^m を導入し，その要素は，

$$
R^m_j = \frac{1}{s_{N-1}(\tau_m)}\sqrt{w(x^m_j)}R^{\mathrm{odd}}_{N-1}(x^m_j;\tau_m) \tag{6.3.43}
$$

で与えられるとしよう．

上のように定義された D^{mn}, I^{mn}, S^{mn} および $\tilde{S}^{mn}$ に対して，以下の定理が成立する．

定理 *6.2*　全固有値分布関数 (6.3.2) は，四元数行列式の形

$$p(x_1^1,\cdots,x_N^1;x_1^2,\cdots,x_N^2;\cdots;x_1^M,\cdots,x_N^M)$$
$$= s_{N-1}(\tau_M)\prod_{j=1}^{(N-1)/2} r_{j-1}(\tau_M)\mathrm{Tdet}[B^{\mu\nu}]_{\mu,\nu=1,2,\cdots,M} \tag{6.3.44}$$

に書ける．各ブロック $B^{\mu\nu}$ は $N\times N$ 四元数行列である．その四元数要素は，

$$B_{jl}^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \tilde{S}_{jl}^{\mu\nu} & I_{jl}^{\mu\nu} \\ D_{jl}^{\mu\nu} & \tilde{S}_{lj}^{\nu\mu} \end{bmatrix},\quad j,l=1,2,\cdots,N \tag{6.3.45}$$

のように表現される．

証明　まず，N が偶数のときと同様に，

$$\frac{1}{s_{N-1}(\tau_M)}\prod_{j=1}^{(N-1)/2}\frac{1}{r_{j-1}(\tau_M)}p(x_1^1,\cdots,x_N^1;\cdots;x_1^M,\cdots,x_N^M)$$
$$= \frac{1}{s_{N-1}(\tau_M)}\prod_{j=1}^{(N-1)/2}\frac{1}{r_{j-1}(\tau_M)}\prod_{j>l}^{N}(x_j^M-x_l^M)$$
$$\times \mathrm{Pf}\begin{bmatrix} [F_{jl}^{11}]_{j,l=1,2,\cdots,N} & [f_j^1]_{j=1,\cdots,N} \\ -[f_l^1]_{l=1,\cdots,N} & 0 \end{bmatrix}\prod_{m=1}^{M-1}\det[g_{jl}^{m+1\ m}]_{j,l=1,2,\cdots,N}$$
$$= (-1)^{(N+1)/2}$$
$$\times \mathrm{Pf}\begin{bmatrix} D^{MM} & R^M & & \\ -(R^M)^{\mathrm{T}} & 0 & & \\ & & -F^{11} & -f^1 \\ & & (f^1)^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}\prod_{m=1}^{M-1}\det[g_{jl}^{m+1\ m}]_{j,l=1,2,\cdots,N} \tag{6.3.46}$$

を導くことができる．ここで，パフィアンを書き換えることにより，

$$\frac{1}{s_{N-1}(\tau_M)}\prod_{j=1}^{(N-1)/2}\frac{1}{r_{j-1}(\tau_M)}p(x_1^1,\cdots,x_N^1;\cdots;x_1^M,\cdots,x_N^M)$$
$$= (-1)^{(N+1)/2}$$
$$\times\,\mathrm{Pf}\begin{bmatrix} D^{MM} & R^M(f^1)^{\mathrm{T}} \\ -f^1(R^M)^{\mathrm{T}} & -F^{11}\end{bmatrix}\prod_{m=1}^{M-1}\det[g_{jl}^{m+1\ m}]_{j,l=1,2,\cdots,N}$$
$$= (-1)^{(N+1)M/2}$$
$$\times\,\mathrm{Pf}\begin{bmatrix} D^{MM} & R^M(f^1)^{\mathrm{T}} \\ -f^1(R^M)^{\mathrm{T}} & -F^{11}\end{bmatrix}\prod_{m=1}^{M-1}\mathrm{Pf}\begin{bmatrix} 0 & -(g^{m+1\ m})^{\mathrm{T}} \\ g^{m+1\ m} & 0\end{bmatrix} \tag{6.3.47}$$

を得る．これは，N が偶数のときの式 (6.3.24) とほぼ同じ形をしている．そこで，以下は同様の手続きにより，結果 (6.3.44) が得られる．　（証明終）

多項式 $R_k^{\mathrm{odd}}(x;\tau)$ は，N が偶数の場合を扱ったときに導入した歪直交多項式 $R_k(x;\tau)$ を使って，

$$R_n^{\mathrm{odd}}(x;\tau) = R_n(x;\tau) - \frac{s_n(\tau)}{s_{N-1}(\tau)}R_{N-1}(x;\tau), \quad n = 0, 1, \cdots, N-2, \tag{6.3.48}$$

$$R_{N-1}^{\mathrm{odd}}(x;\tau) = R_{N-1}(x;\tau) \tag{6.3.49}$$

のように定める．このとき，(6.3.35) が満足される．ただし，

$$s_n(\tau) = \int \mathrm{d}x\sqrt{w(x)}f(x;\tau)R_n(x;\tau) \tag{6.3.50}$$

である．

四元数行列式表示

$R_k(x;\tau)$ の間の歪直交関係を使って計算すると，

$$\int B_{ji}^{mp} B_{il}^{pn} \mathrm{d}x_i^p$$

$$= \begin{cases} 0, & m < p,\ p > n, \\ B_{jl}^{mn}\xi, & m < p,\ p = n, \\ \eta B_{jl}^{mn}, & m = p,\ p > n, \\ \eta B_{jl}^{mn} + B_{jl}^{mn}\xi, & m = p,\ p = n, \\ \eta B_{jl}^{mn} + B_{jl}^{mn}\xi - \xi B_{jl}^{mn} - B_{jl}^{mn}\eta, & m > p,\ p < n, \\ \eta B_{jl}^{mn} + B_{jl}^{mn}\xi - \xi B_{jl}^{mn}, & m > p,\ p = n, \\ \eta B_{jl}^{mn} + B_{jl}^{mn}\xi - B_{jl}^{mn}\eta, & m = p,\ p < n, \\ \eta B_{jl}^{mn} - \xi B_{jl}^{mn}, & m > p,\ p > n, \\ B_{jl}^{mn}\xi - B_{jl}^{mn}\eta, & m < p,\ p < n \end{cases} \tag{6.3.51}$$

および

$$\int B_{jj}^{mm} \mathrm{d}x_j^m = N \tag{6.3.52}$$

の関係が証明できる．ただし，ξ と η の 2×2 行列表示は，

$$\xi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \eta = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6.3.53}$$

によって与えられる．

さらに，四元数要素 B_{jl}^{mn} からなる四元数長方行列 Q_{JL}^{mn} を，

$$Q_{JL}^{mn} = \begin{bmatrix} B_{11}^{mn} & \cdots & B_{1L}^{mn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{J1}^{mn} & \cdots & B_{JL}^{mn} \end{bmatrix} \tag{6.3.54}$$

のように定義する．そして，自己双対四元数行列 Q は，

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{n_1 n_1}^{11} & \cdots & Q_{n_1 n_K}^{1K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{n_K n_1}^{K1} & \cdots & Q_{n_K n_K}^{KK} \end{bmatrix} \tag{6.3.55}$$

によって与えられるとする．ここで，四元数行列 Q の m 番目の行（列）ブロックの j 番目の行（列）を (m,j) 行（列）と呼ぶことにしよう．(m,j) 行と (m,j) 列は，変数 x_j^m を含む．もし (m,j) 行と (m,j) 列が除かれると，その結果として得られる四元数行列 Q_j^m は自己双対である．ただし，もはや変数 x_j^m を含まない．

以上の定義を使うことにより，本章で最も重要な次の定理を述べることができる．

定理 *6.3*　四元数行列式 Tdet Q を変数 $x_{n_\mu}^\mu$ について積分したとき，

$$\int \mathrm{d}x_{n_\mu}^\mu \mathrm{Tdet}\ Q = (N - n_\mu + 1)\mathrm{Tdet}\ Q_{n_\mu}^\mu \tag{6.3.56}$$

が成立する．

証明　まず，Tdet Q を (μ, n_μ) 列について展開すると，

$$\begin{aligned}\mathrm{Tdet}\ Q = &-\sum_{m=1}^{\mu-1}\sum_{j=1}^{n_m}\mathrm{tr}\left\{\mathrm{Tdet}\ Q[\mu,n_\mu;m,j]B_{jn_\mu}^{m\mu}\right\}\\ &-\sum_{j=1}^{n_\nu-1}\mathrm{tr}\left\{\mathrm{Tdet}\ Q[\mu,n_\mu;\mu,j]B_{jn_\mu}^{\mu\mu}\right\}\\ &+\mathrm{Tdet}\ Q[\mu,n_\mu;\mu,n_\mu]B_{n_\mu n_\mu}^{\mu\mu}\\ &-\sum_{m=\mu+1}^{K}\sum_{j=1}^{n_m}\mathrm{tr}\left\{\mathrm{Tdet}\ Q[\mu,n_\mu;m,j]B_{jn_\mu}^{m\mu}\right\}\end{aligned} \tag{6.3.57}$$

を得る．ただし，$Q[\mu, n_\mu; m, j]$ は，行列 Q の (m,j) 行の要素を対応する (μ, n_μ) 行の要素で置き換え，次に (μ, n_μ) 行と (μ, n_μ) 列を消去することによって得られる行列である．次に，関係 (1.1.9) を使って，$B_{jn_\mu}^{m\mu}$ を Tdet $Q[\mu, n_\mu; m, j]$ の左に移動させることができる．さらに，四元数行列式の行展開 (6.2.3) に注意すると，いま左に移動させた $B_{jn_\mu}^{m\mu}$ を，$Q[\mu, n_\nu; m, j]$ の (m,j) 行に左からかけることにより，四元数行列式の中に含ませることが

できる．すなわち，

$$\begin{aligned}\mathrm{Tdet}\ Q = &-\sum_{m=1}^{\mu-1}\sum_{j=1}^{n_m}\mathrm{tr}\ \mathrm{Tdet}\ Q'[\mu,n_\mu;m,j]\\ &-\sum_{j=1}^{n_\nu-1}\mathrm{tr}\ \mathrm{Tdet}\ Q'[\mu,n_\mu;\mu,j]\\ &+B^{\mu\mu}_{n_\mu n_\mu}\mathrm{Tdet}\ Q[\mu,n_\mu;\mu,n_\mu]\\ &-\sum_{m=\mu+1}^{K}\sum_{j=1}^{n_m}\mathrm{tr}\ \mathrm{Tdet}\ Q'[\mu,n_\mu;m,j]\end{aligned}\tag{6.3.58}$$

となる．ただし，$Q'[\mu,n_\mu;m,j]$ は，$Q[\mu,n_\mu;m,j]$ の (m,j) 行の各要素に左から $B^{m\mu}_{jn_\nu}$ をかけることによって得られる行列である．

ここで，$x^\mu_{n_\mu}$ についての積分を実行しよう．$B'[\mu,n_\mu;m,j]$ の (m,j) 行 (n,l) 列の要素は，$B^{m\mu}_{jn_\mu}B^{\mu n}_{n_\mu l}$ になる．$x^\mu_{n_\mu}$ に依存する要素はすべて (m,j) 行にあるから，積分による変化は，(m,j) 行 (n,l) 列 の要素が，

$$V^{mn}_{jl}=\int \mathrm{d}B^{m\mu}_{jn_\mu}B^{\mu n}_{n_\mu l}\mathrm{d}x^\mu_{n_\mu}\tag{6.3.59}$$

に変わることだけである．V^{mn}_{jl} の値は，すでに (6.3.51) に評価されている．そこで，積分後の四元数行列式を (m,j) 行について行展開すると，

$$\begin{aligned}&\int \mathrm{Tdet}\ Q\mathrm{d}x^\mu_{n_\mu}\\ &=N\Delta-(n_\mu-1)\mathrm{tr}\,(\eta\Delta)-(n_{\mu+1}+n_{\mu+2}+\cdots+n_K)\mathrm{tr}\left\{(\eta-\xi)\Delta\right\}\\ &-\sum_{m=1}^{\mu-1}\sum_{j=1}^{n_m}\sum_{k=1}^{n_\mu-1}\mathrm{tr}\left(B^{m\mu}_{jk}\xi\Delta^{m\mu}_{jk}\right)\\ &-\sum_{m=1}^{\mu-1}\sum_{j=1}^{n_m}\sum_{l=\mu+1}^{K}\sum_{k=1}^{n_l}\mathrm{tr}\left\{B^{ml}_{jk}(\xi-\eta)\Delta^{ml}_{jk}\right\}\\ &-\sum_{j=1}^{n_\mu-1}\sum_{k=1}^{n_\mu-1}\mathrm{tr}\left(B^{\mu\mu}_{jk}\xi\Delta^{\mu\mu}_{jk}\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \sum_{j=1}^{n_\mu-1} \sum_{l=\mu+1}^{K} \sum_{k=1}^{n_l} \mathrm{tr}\left\{B_{jk}^{\mu l}(\xi-\eta)\Delta_{jk}^{\mu l}\right\} \\
&- \sum_{m=\mu+1}^{K} \sum_{j=1}^{n_m} \sum_{k=1}^{n_\mu-1} \mathrm{tr}\left(B_{jk}^{m\mu}\xi\Delta_{jk}^{m\mu}\right) \\
&- \sum_{m=\mu+1}^{K} \sum_{j=1}^{n_m} \sum_{l=\mu+1}^{K} \sum_{k=1}^{n_l} \mathrm{tr}\left\{B_{jk}^{ml}(\xi-\eta)\Delta_{jk}^{ml}\right\} \qquad (6.3.60)
\end{aligned}
$$

を得る．ここで，

$$
\begin{aligned}
\Delta &= \mathrm{Tdet}\ Q_{n_\mu}^{\mu}, \\
\Delta_{jl}^{mn} &= \mathrm{Tdet}\ Q_{n_\mu}^{\mu}(m,j;n,l) \qquad (6.3.61)
\end{aligned}
$$

である．ただし，行列 $Q_{n_\mu}^{\mu}(m,j;n,l)$ は，行列 $Q_{n_\mu}^{\mu}$ の (n,l) 列の要素を対応する (m,j) 列の要素で置き換え，次に (m,j) 行と (m,j) 列を消去することによって得られる．一方，**予備定理** *6.3* より，

$$
\begin{aligned}
\Delta &= \sum_{m=1}^{\mu-1} \sum_{j=1}^{n_m} \Delta_{jk}^{m\mu} B_{jk}^{m\mu} + \sum_{j=1}^{n_\mu-1} \Delta_{jk}^{\mu\mu} B_{jk}^{\mu\mu} + \sum_{m=\mu+1}^{K} \sum_{j=1}^{n_m} \Delta_{jk}^{m\mu} B_{jk}^{m\mu} \\
&= \sum_{m=1}^{\mu-1} \sum_{j=1}^{n_m} \Delta_{jk}^{ml} B_{jk}^{ml} + \sum_{j=1}^{n_\mu-1} \Delta_{jk}^{\mu l} B_{jk}^{\mu l} + \sum_{m=\mu+1}^{K} \sum_{j=1}^{n_m} \Delta_{jk}^{ml} B_{jk}^{ml} \qquad (6.3.62)
\end{aligned}
$$

が導かれる．そこで，(6.3.60) に対して (6.3.62) を使うことにより，

$$
\begin{aligned}
&\int \mathrm{Tdet}\ Q \mathrm{d}x_{n_\mu}^{\mu} \\
&= N\Delta - (n_\mu - 1)\mathrm{tr}\,(\eta\Delta) - (n_{\mu+1} + n_{\mu+2} + \cdots + n_K)\mathrm{tr}\,((\eta-\xi)\Delta) \\
&- (n_\mu - 1)\mathrm{tr}\,(\xi\Delta) - (n_{\mu+1} + n_{\mu+2} + \cdots + n_K)\mathrm{tr}\,((\xi-\eta)\Delta) \\
&= (N - n_\mu + 1)\Delta \qquad (6.3.63)
\end{aligned}
$$

に至る．これで，**定理** *6.3* が証明された． （証明終）

定理 *6.3* は相関関数の間の漸化関係として用いることができる．**定理** *6.3* を続けて適用することにより，動的相関関数 (6.3.3) の四元数行列式表示

$$\rho(x_1^1, \cdots, x_{m_1}^1; \cdots; x_1^M, \cdots, x_{m_M}^M)$$
$$= \mathrm{Tdet}[B^{\mu\nu}(m_\mu, m_\nu)]_{\mu,\nu=1,2,\cdots,M} \tag{6.3.64}$$

および規格化定数

$$c_N = \begin{cases} (N!)^M \displaystyle\prod_{j=1}^{N/2} r_{j-1}(\tau_M), & N \text{ が偶数のとき}, \\ (N!)^M s_{N-1}(\tau_M) \displaystyle\prod_{j=1}^{(N-1)/2} r_{j-1}(\tau_M), & N \text{ が奇数のとき} \end{cases} \tag{6.3.65}$$

が導かれる．ここで，各ブロック $B^{\mu\nu}(m_\mu, m_\nu)$ は，$m_\mu+1, m_\mu+2, \cdots, N$ 番目の行と $m_\nu+1, m_\nu+2, \cdots, N$ 番目の列を $B^{\mu\nu}$ から除くことによってつくられる．

6.4　長時間極限

前節では，ユニタリアンサンブルへの遷移を記述するブラウン運動モデルに対して，動的相関関数の四元数行列式表示が得られた．ここで，$\tau_j - \tau_l$，$j, l = 1, 2, \cdots, M$ を固定したまま，長時間極限 $\tau_j \to \infty$，$j = 1, 2, \cdots, M$ をとることを考えてみよう．この場合，初期条件の情報は忘れられてしまい，最後に到達するユニタリアンサンブルのブラウン運動が記述される．この極限においては，動的相関関数は，普通の行列式によって表示される．

<u>N **が偶数の場合**</u>

歪直交多項式 $R_n(x;\tau)$ の $\tau = 0$ での形が，

$$R_n(x;0) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_{nj} C_j(x), \quad \alpha_{nn} = 1 \tag{6.4.1}$$

であるとしよう．長時間極限を議論するときに鍵となるのは，このとき，$R_n(x;\tau)$ が，任意の τ に対して，

$$R_n(x;\tau)\mathrm{e}^{\gamma_n\tau} = \sum_{j=0}^{n} \alpha_{nj} C_j(x)\mathrm{e}^{\gamma_j\tau} \tag{6.4.2}$$

のように書けるという事実である [49]．これは，反対称内積の定義 (6.3.29) より，

$$\langle R_m(x;\tau), R_n(y;\tau)\rangle = \mathrm{e}^{-(\gamma_m+\gamma_n)\tau}\langle R_m(x;0), R_n(y;0)\rangle_0 \tag{6.4.3}$$

であることから証明できる．ただし，

$$\langle f(x), g(y)\rangle_0 = \int \mathrm{d}x \int \mathrm{d}y \sqrt{w(x)w(y)} F(y,x;0,0) f(y) g(x) \tag{6.4.4}$$

とする．規格化定数の関係式

$$r_n(\tau) = \mathrm{e}^{-(\gamma_{2n}+\gamma_{2n+1})\tau} r_n(0) \tag{6.4.5}$$

も，ただちに導かれる．

ここで，(2.4.67) または (2.4.68) によって定義される関数 $F(x,y;\tau,\tau')$ が，定義式に (2.4.41) または (5.4.21) をそれぞれ代入することにより，

$$\begin{aligned} &F(x,y;\tau,\tau') \\ &= \sqrt{w(x)w(y)} \sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{C_\mu(x)C_\nu(y)\mathrm{e}^{-\gamma_\mu\tau}\mathrm{e}^{-\gamma_\nu\tau'}}{h_\mu h_\nu} \langle C_\mu(z), C_\nu(z')\rangle_0 \end{aligned} \tag{6.4.6}$$

のように書き直せることに着目する．(6.3.9) に (6.4.6) を代入し，展開 (6.4.2) の逆展開

$$C_n(x)\mathrm{e}^{\gamma_n\tau} = \sum_{j=0}^{n} \beta_{nj}\mathrm{e}^{\gamma_j\tau} R_j(x;\tau), \quad \beta_{nn} = 1 \tag{6.4.7}$$

を用いると，関数 $\Phi_k(x;\tau)$ は，

$$\Phi_k(x;\tau) = \sqrt{w(x)}\mathrm{e}^{-\gamma_k\tau}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{C_\nu(x)\mathrm{e}^{-\gamma_\nu\tau}}{h_\nu}\langle R_k(z;0), C_\nu(z')\rangle_0$$

$$= \sqrt{w(x)}\mathrm{e}^{-\gamma_k\tau}\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{\nu=j}^{\infty}\frac{C_\nu(x)\mathrm{e}^{-\gamma_\nu\tau}}{h_\nu}\beta_{\nu j}\langle R_k(z;0), R_j(z';0)\rangle_0 \quad (6.4.8)$$

のように表される．したがって，

$$\Phi_{2k-1}(x;\tau)\mathrm{e}^{\gamma_{2k-1}\tau} = -\sqrt{w(x)}\sum_{\nu=2k-2}^{\infty}\frac{C_\nu(x)\mathrm{e}^{-\gamma_\nu\tau}}{h_\nu}\beta_{\nu\ 2k-2}r_{k-1}(0),$$

$$\Phi_{2k-2}(x;\tau)\mathrm{e}^{\gamma_{2k-2}\tau} = \sqrt{w(x)}\sum_{\nu=2k-1}^{\infty}\frac{C_\nu(x)\mathrm{e}^{-\gamma_\nu\tau}}{h_\nu}\beta_{\nu\ 2k-1}r_{k-1}(0) \quad (6.4.9)$$

である．これを，$S(x,y;\tau,\tau')$ の定義 (6.3.8) に代入すると，

$$S(x,y;\tau,\tau') = S_1(x,y;\tau,\tau') + S_2(x,y;\tau,\tau') \quad (6.4.10)$$

を得る．ただし，

$$S_1(x,y;\tau,\tau') = \sqrt{w(x)w(y)}\sum_{\nu=0}^{N-1}\frac{C_\nu(x)C_\nu(y)\mathrm{e}^{-\gamma_\nu(\tau-\tau')}}{h_\nu}, \quad (6.4.11)$$

$$S_2(x,y;\tau,\tau') = \sqrt{w(x)w(y)}\sum_{\nu=N}^{\infty}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{C_\nu(x)\mathrm{e}^{-\gamma_\nu\tau}}{h_\nu}\beta_{\nu k}R_k(y;\tau')\mathrm{e}^{\gamma_k\tau'} \quad (6.4.12)$$

である．また，(6.4.7) を (6.4.6) に代入して (6.4.9) と比較することにより，F_{jl}^{mn} を，

$$F(x,y;\tau,\tau') = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{r_k(\tau')}\Big[\mathrm{e}^{-\gamma_{2k}(\tau'-\tau)}\Phi_{2k}(x;\tau)\Phi_{2k+1}(y;\tau') - \mathrm{e}^{-\gamma_{2k+1}(\tau'-\tau)}\Phi_{2k+1}(x;\tau)\Phi_{2k}(y;\tau')\Big] \quad (6.4.13)$$

のように書き直すこともできる．したがって，(6.3.7) より，

$$I(x,y;\tau,\tau') = \sum_{k=N/2}^{\infty} \frac{1}{r_k(\tau')} \Big[\mathrm{e}^{-\gamma_{2k}(\tau'-\tau)} \Phi_{2k}(x;\tau)\Phi_{2k+1}(y;\tau') \\ - \mathrm{e}^{-\gamma_{2k+1}(\tau'-\tau)} \Phi_{2k+1}(x;\tau)\Phi_{2k}(y;\tau') \Big] \tag{6.4.14}$$

となる．

ここで，$0 \le \gamma_0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \cdots$ を仮定して，$\tau_j \to \infty$，$j = 1,2,\cdots,M$ の長時間極限を，$\tau_j - \tau_l$，$j,l = 1,2,\cdots,M$ を固定したままとると，(6.4.10) より，

$$\tilde{S}_{jl}^{mn} \sim \sigma_{jl}^{mn} = \begin{cases} S_1(x_j^m, x_l^n; \tau_m, \tau_n), & m \le n, \\ S_1(x_j^m, x_l^n; \tau_m, \tau_n) - g_{jl}^{mn}, & m > n \end{cases} \tag{6.4.15}$$

が得られる．(6.4.2) および (6.4.9) から，長時間極限において，$R_n(x;\tau) \sim C_n(x)$，$\Phi_{2k-1}(x;\tau) \sim O(\mathrm{e}^{-(\gamma_{2k-1}+\gamma_{2k-2})\tau})$，および $\Phi_{2k-2}(x;\tau) \sim O(\mathrm{e}^{-(\gamma_{2k-1}+\gamma_{2k-2})\tau})$ の関係が導かれるので，

$$I_{jl}^{mn} \sim O(\mathrm{e}^{-(\gamma_{N+1}+\gamma_N)\tau}), \quad D_{jl}^{mn} \sim O(\mathrm{e}^{(\gamma_{N-2}+\gamma_{N-1})\tau}) \tag{6.4.16}$$

となる．ただし，$f \sim O(g)$ は，f/g が有限の漸近極限をもつという意味である．したがって，四元数行列式表示において，長時間極限では，I_{jl}^{mn} と D_{jl}^{mn} をゼロに置き換え，$\tilde{S}_{jl}^{mn}$ を σ_{jl}^{mn} に置き換えればよいことがわかる．そこで，**予備定理** *6.4* を使って四元数行列式をパフィアンに書き換え，さらに行と列の入れ替えを行うと，普通の行列式の表示

$$\rho(x_1^1,\cdots,x_{m_1}^1;\cdots;x_1^M,\cdots,x_{m_M}^M) = \det[\sigma^{\mu\nu}(m_\mu,m_\nu)]_{\mu,\nu=1,2,\cdots,M} \tag{6.4.17}$$

を得る．ここで，各ブロック $\sigma^{\mu\nu}(m_\mu,m_\nu)$ は，$m_\mu+1, m_\mu+2,\cdots,N$ 番目の行と $m_\nu+1, m_\nu+2,\cdots,N$ 番目の列を $\sigma^{\mu\nu}$ から除くことによってつくられる．

N が奇数の場合

次に，N が奇数の場合を考えよう．まず，

$$s_k(\tau) = e^{-\gamma_k \tau} s_k(0) \tag{6.4.18}$$

であることに注意すると，$f(x;\tau)$ を，

$$\begin{aligned} f(x;\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r_k(\tau')} \Big[& \mathrm{e}^{-\gamma_{2k}(\tau'-\tau)} \Phi_{2k}(x;\tau) s_{2k+1}(\tau') \\ & - \mathrm{e}^{-\gamma_{2k+1}(\tau'-\tau)} \Phi_{2k+1}(x;\tau) s_{2k}(\tau') \Big] \end{aligned} \tag{6.4.19}$$

のように書き直すことができる．これを代入することにより，

$$\begin{aligned} S(x,y;\tau,\tau') = & \sqrt{w(x)w(y)} \sum_{\nu=0}^{N-2} \frac{C_\nu(x) C_\nu(y) \mathrm{e}^{-\gamma_\nu(\tau-\tau')}}{h_\nu} \\ & + \sqrt{w(x)w(y)} \sum_{\nu=N-1}^{\infty} \sum_{k=0}^{N-2} \frac{C_\nu(x) \mathrm{e}^{-\gamma_\nu \tau}}{h_\nu} \beta_{\nu k} R_k(y;\tau') \mathrm{e}^{\gamma_k \tau'} \\ & - \sqrt{w(y)} \frac{\Phi_{N-1}(x;\tau)}{s_{N-1}(\tau)} \sum_{k=0}^{(N-3)/2} \frac{1}{r_k(\tau')} \\ & \times [s_{2k}(\tau') R_{2k+1}(y;\tau') - s_{2k+1}(\tau') R_{2k}(y;\tau')] \\ & + \sqrt{w(x)w(y)} \frac{R_{N-1}(y;\tau')}{s_{N-1}(\tau')} \sum_{k=N-1}^{\infty} s_k(0) \sum_{\nu=k}^{\infty} \frac{C_\nu(x) \mathrm{e}^{-\gamma_\nu \tau}}{h_\nu} \beta_{\nu k} \end{aligned} \tag{6.4.20}$$

が示される．さらに，$I(x,y;\tau,\tau')$ も，

$$\begin{aligned} I(x,y;\tau,\tau') = & \sum_{k=(N+1)/2}^{\infty} \frac{1}{r_k(\tau')} \Big[\mathrm{e}^{-\gamma_{2k}(\tau'-\tau)} \Phi_{2k}(x;\tau) \Phi_{2k+1}(y;\tau') \\ & - \mathrm{e}^{-\gamma_{2k+1}(\tau'-\tau)} \Phi_{2k+1}(x;\tau) \Phi_{2k}(y;\tau') \Big] \\ & - \frac{\Phi_{N-1}(x;\tau)}{s_{N-1}(\tau)} \sum_{k=(N+1)/2}^{\infty} \frac{1}{r_k(\tau')} \Big[\mathrm{e}^{-\gamma_{2k}(\tau'-\tau)} s_{2k}(\tau) \Phi_{2k+1}(y;\tau') \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \mathrm{e}^{-\gamma_{2k+1}(\tau'-\tau)} s_{2k+1}(\tau)\Phi_{2k}(y;\tau')\Big] \\
&-\frac{\Phi_{N-1}(y;\tau')}{s_{N-1}(\tau')} \sum_{k=(N+1)/2}^{\infty} \frac{1}{r_k(\tau')} \Big[\mathrm{e}^{-\gamma_{2k}(\tau'-\tau)}\Phi_{2k}(x;\tau)s_{2k+1}(\tau') \\
&-\mathrm{e}^{-\gamma_{2k+1}(\tau'-\tau)}\Phi_{2k+1}(x;\tau)s_{2k}(\tau')\Big]
\end{aligned}
\tag{6.4.21}
$$

のように書き直される．ここで，仮定 $0 \leq \gamma_0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \cdots$ の下で，$\tau_j - \tau_l$, $j,l = 1,2,\cdots,M$ を固定して，長時間極限 $\tau_j \to \infty$, $j = 1,2,\cdots,M$ をとる．このとき，

$$
\begin{aligned}
&\sqrt{w(x_j^m)w(x_l^n)}\frac{R_{N-1}(x_l^n;\tau_n)}{s_{N-1}(\tau_n)} \sum_{k=N-1}^{\infty} s_k(0) \sum_{\nu=k}^{\infty} \frac{C_\nu(x_j^m)\mathrm{e}^{-\gamma_\nu\tau_m}}{h_\nu}\beta_{\nu k} \\
&\sim \sqrt{w(x_j^m)w(x_l^n)}\frac{C_{N-1}(x_j^m)C_{N-1}(x_l^n)\mathrm{e}^{-\gamma_{N-1}(\tau_m-\tau_n)}}{h_{N-1}}
\end{aligned}
\tag{6.4.22}
$$

であることに注意すると，

$$
\tilde{S}_{jl}^{mn} \sim \sigma_{jl}^{mn} = \begin{cases} S_1(x_j^m, x_l^n; \tau_m, \tau_n), & m \leq n, \\ S_1(x_j^m, x_l^n; \tau_m, \tau_n) - g_{jl}^{mn}, & m > n \end{cases}
\tag{6.4.23}
$$

が得られる．ただし，$S_1(x,y;\tau,\tau')$ は，(6.4.11) で定義されている．漸近関係 $R_n(x;\tau) \sim C_n(x)$, $\Phi_{2k-1}(x;\tau) \sim O(\mathrm{e}^{-(\gamma_{2k-1}+\gamma_{2k-2})\tau})$，および $\Phi_{2k-2}(x;\tau) \sim O(\mathrm{e}^{-(\gamma_{2k-1}+\gamma_{2k-2})\tau})$ により，

$$
I_{jl}^{mn} \sim O(\mathrm{e}^{-(\gamma_{N+1}+\gamma_N)\tau_m}), \quad D_{jl}^{mn} \sim O(\mathrm{e}^{(\gamma_{N-2}+\gamma_{N-1})\tau_m})
\tag{6.4.24}
$$

もわかる．したがって，長時間極限においては，N が偶数のときと同様に，I_{jl}^{mn} と D_{jl}^{mn} をゼロにおくことができ，N が偶数のときと同じ行列式表示 (6.4.17) が導かれる．

章末問題

[1] $F(x,y;\tau,\tau')$ が (2.4.67) で与えられるとき，

$$\left\langle \frac{1}{2}\frac{u'(x)}{u(x)}f(x), g(y)\right\rangle_0 + \langle f'(x), g(y)\rangle_0 = 2\int u(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

が成立することを証明せよ（反対称内積 $\langle f(x), g(y)\rangle_0$ は，(6.4.4) で定義されている）．ただし，$u(x)$ は積分範囲の端ではゼロであるとしてよい．

[2] 重み関数 $u(x)$ を，

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x \leq -1, \\ (1-x)^a(1+x)^b, & -1 < x < 1, \\ 0, & x \geq 1 \end{cases}$$

として $(a, b > 0)$，(2.4.67) に対応する歪直交多項式 $R_n(x;0)$ の形を導こう．Jacobi 多項式

$$P_n^{(a,b)}(x) = \frac{1}{(1-x)^a(1+x)^b}\frac{(-1)^n}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left\{(1-x)^{n+a}(1+x)^{n+b}\right\}$$

を使って，最高次の項の係数が 1 である直交多項式

$$C_n(x) = x^n + \cdots = 2^n n!\frac{(a+b+n+2)!}{(a+b+2n+2)!}P_n^{(a+1,b+1)}(x)$$

を定義する．$C_n(x)$ は，直交関係

$$\int u(x)(1-x^2)C_m(x)C_n(x)\mathrm{d}x = h_n\delta_{mn},$$

$$h_n = 2^{2n+a+b+3}n!\frac{(n+a+1)!(n+b+1)!(n+a+b+2)!}{(2n+a+b+2)!(2n+a+b+3)!}$$

を満たす．$f(x) = (1-x^2)C_m(x)$, $g(x) = R_n(x;0) = \sum_{j=0}^{n}\alpha_{n\ j}C_j(x)$ とおいて，[1] で導いた関係に代入することにより，

$$R_{2n}(x;0) = C_{2n}(x),$$

$$R_{2n+1}(x;0) = C_{2n+1}(x)$$

$$-\frac{8n(2n+a+1)(2n+b+1)(2n+a+b+2)}{(4n+a+b+1)(4n+a+b+2)(4n+a+b+3)(4n+a+b+4)}C_{2n-1}(x)$$

および

$$r_n(0) = 2^{4n+a+b+5}(2n)!\frac{(2n+a+1)!(2n+b+1)!(2n+a+b+2)!}{(4n+a+b+2)!(4n+a+b+4)!}$$

であることを示せ [1, 95, 103].

[3] $F(x, y; \tau, \tau')$ が (2.4.68) で与えられるとき，

$$\langle f(x), g(y)\rangle_0 = -\int u'(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x - 2\int u(x)f'(x)g(x)\mathrm{d}x$$

が成立することを証明せよ．$u(x)$ は，積分範囲の端ではゼロとする．

[4] 上の [2] で考えたのと同じ重み関数 $u(x)$ に対して，(2.4.68) に対応する歪直交多項式 $R_n(x; 0)$ の形を導こう．Jacobi 多項式を使って，

$$C_n(x) = x^n + \cdots = 2^n n!\frac{(a+b+n-2)!}{(a+b+2n-2)!}P_n^{(a-1,b-1)}(x)$$

を定義する．$C_n(x)$ は，直交関係

$$\int u(x)(1-x^2)^{-1}C_m(x)C_n(x)\mathrm{d}x = h_n\delta_{mn},$$

$$h_n = 2^{2n+a+b-1}n!\frac{(n+a-1)!(n+b-1)!(n+a+b-2)!}{(2n+a+b-2)!(2n+a+b-1)!}$$

を満たす．$f(x) = R_m(x; 0)$, $g(x) = C_n(x) = \sum_{j=0}^{n}\beta_{nj}R_j(x; 0)$ とおいて，[3] で導いた関係に代入し，

$$\begin{aligned}
&C_{2n}(x) = R_{2n}(x; 0) \\
&-\frac{8n(2n+a-1)(2n+b-1)(2n+a+b-2)}{(4n+a+b-1)(4n+a+b-2)(4n+a+b-3)(4n+a+b-4)} \\
&\times R_{2n-2}(x; 0), \\
&C_{2n+1}(x) = R_{2n+1}(x; 0)
\end{aligned}$$

および

$$r_n(0) = 2^{4n+a+b+1}(2n+1)!\frac{(2n+a)!(2n+b)!(2n+a+b-1)!}{(4n+a+b-1)!(4n+a+b+1)!}$$

を示せ [1, 95, 103].

[5] Selberg の積分公式 [84, 120]

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 \prod_{j=1}^{N} x_j^{a-1}(1-x_j)^{b-1} \prod_{j<l}^{N} |x_j - x_l|^{2c} \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_N$$
$$= \prod_{j=1}^{N-1} \frac{(jc+c)!(jc+a-1)!(jc+b-1)!}{c!((N+j-1)c+a+b-1)!}$$

および (6.3.65) より，$r_n(0)$ を評価し，[2] と [4] で求めた結果と比較せよ．Selberg の積分公式は，β を連続パラメータに一般化した場合に対して，規格化定数 c_N を与える．

第 7 章　相関関数の漸近形

前章で強調したように，ランダム行列理論において最も重要な研究対象は，固有値分布のゆらぎである．固有値分布のゆらぎは，相関関数によって記述され，とくに，その行列次元 N が無限大 $(N \to \infty)$ での漸近形に興味がある．なぜなら，自然現象（あるいは社会現象）への応用において，ランダム行列は特殊な理想化されたモデルにすぎないが，普遍性 (universality) があるために，漸近形に関する限り，ランダム行列の結果が広く一般に再現されるからである．なお，本章では，N が偶数であるか奇数であるかによらない漸近形ばかりを扱うので，N は常に偶数であるとして議論を進める．本章で扱わない場合，たとえば，第 2 章の章末問題で考えた反対称エルミート（実反対称）ランダム行列などでは，漸近形が N の偶奇性に依存することがある [46]．

7.1　ソフトエッジの漸近形

まず，ガウス型ユニタリアンサンブルから議論を始めよう．ガウス型ユニタリアンサンブルにおいて，$N \times N$ 複素エルミート行列の固有値の確率分布関数は，(2.2.11) より，

$$p(x_1,\cdots,x_N)\propto\prod_{j=1}^{N}\mathrm{e}^{-x_j^2}\prod_{j<l}^{N}|x_j-x_l|^2 \tag{7.1.1}$$

のように書ける．これは，前章までの議論では，

$$w(x)=\mathrm{e}^{-x^2} \tag{7.1.2}$$

の場合である．したがって，前章 (6.1.29) で示したように，相関関数 $\rho(x_1,\cdots,x_n)$ は，行列式

$$\rho(x_1,\cdots,x_n)=\det[K(x_j,x_l)]_{j,l=1,2,\cdots,n} \tag{7.1.3}$$

の形に書ける．ここで，

$$\begin{aligned}K(x,y)&=\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2}\sum_{j=0}^{N-1}\frac{1}{h_j}C_j(x)C_j(y)\\&=\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2}\frac{1}{h_{N-1}}\frac{C_N(x)C_{N-1}(y)-C_{N-1}(x)C_N(y)}{x-y}\end{aligned} \tag{7.1.4}$$

であり，多項式 $C_n(x)$ は直交関係

$$\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}C_m(x)C_n(x)\mathrm{d}x=h_n\delta_{mn} \tag{7.1.5}$$

を満たす．このとき，直交多項式 $C_n(x)$ は，Hermite 多項式 $H_n(x)$ を用いて，

$$C_n(x)=\frac{1}{2^n}H_n(x),\quad h_n=\frac{\sqrt{\pi}n!}{2^n} \tag{7.1.6}$$

のように書ける．

Hermite 多項式 $H_n(x)$ の $n\to\infty$ における漸近形は，$x=\sqrt{2n+1}\cos\phi$, $0<\phi<\pi$ に対して，

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^{-x^2/2}H_n(\sqrt{2n+1}\cos\phi)\\&\sim 2^{(2n+1)/4}(n!)^{1/2}(\pi n)^{-1/4}(\sin\phi)^{-1/2}\sin\left[\frac{2n+1}{4}(\sin 2\phi-2\phi)+\frac{3}{4}\pi\right]\end{aligned} \tag{7.1.7}$$

によって与えられる [131]．相関関数の行列式表示より，固有値密度は，

$$\rho(x) = K(x,x) = \mathrm{e}^{-x^2} \frac{1}{h_{N-1}} \left\{ C'_N(x) C_{N-1}(x) - C'_{N-1}(x) C_N(x) \right\} \tag{7.1.8}$$

のように書ける．Hermite 多項式の微分の漸近形は，

$$H'_n(x) = 2n H_{n-1}(x) \tag{7.1.9}$$

より評価できることに注意して，漸近形を固有値密度の表式に代入すると，

$$\rho(x) \sim \frac{1}{\pi} \sqrt{2N - x^2}, \quad -\sqrt{2N} < x < \sqrt{2N} \tag{7.1.10}$$

を得る．もちろん，Wigner の半円則に従う結果である．このような，連続関数で記述される固有値分布を，一般にバンドと呼ぶ．

それでは，2 体以上の相関関数はどのような漸近的な振る舞いをするであろうか．ここでは，決まった点 z のまわりの平均準位間隔（すなわち固有値密度の逆数）程度の幅の局所領域内での振る舞いに注目しよう．そのためには，スケーリング変数 ω, ω' を，

$$x \mapsto z + \frac{1}{\rho(z)} \omega, \quad y \mapsto z + \frac{1}{\rho(z)} \omega' \tag{7.1.11}$$

によって導入した上で，極限 $N \to \infty$ を考えればよい．Hermite 多項式の漸近形 (7.1.7) を $K(x,y)$ の表式に代入して計算を実行すると，単純な形

$$K(x,y) \sim \rho(z) \frac{\sin \pi(\omega - \omega')}{\pi(\omega - \omega')} \tag{7.1.12}$$

を得る．これを sine 核 (sine kernel) と呼ぶ．核の概念については，第 10 章で説明する．右辺は，因子 $\rho(z)$ を除き，z に依存しないこと（一様性）に注目してもらいたい．このようにして得られた相関関数の局所的な振る舞いは，バンド内部の全域で一様に成立するだけでなく，他のユニタリ不変なアンサンブルや，行列要素が独立に確率分布するアンサンブルにおいて，広く一般的に成立する [11, 18, 60, 72, 125]．それればかりか，メソスコピック系，量

子カオス系などの物理系のエネルギー準位統計にも（時間反転対称性が破れている場合に）普遍的に現れ，波動関数が局在していない状態を特徴づける [2, 52, 55, 64, 121]．また，まえがきで述べたように，Riemann ゼータ関数の零点分布においても，同じ統計性が発見されている [27, 76, 89, 105, 116]．大域的な固有値密度にはよらず，$N \to \infty$ での局所相関の振る舞いに関してのみ，多くの系が普遍的に同じ統計性を共有するのである．このような性質は普遍性 (universality) と呼ばれ，多くの場合において，ランダム行列理論の応用の基礎となっている．有限の N に対する相関関数には普遍性がないが，相関関数の行列式構造には（$N \to \infty$ の後でも変わらないので）普遍性があることにも，注意してもらいたい．

普遍性には，ガウス型ユニタリアンサンブルに対する漸近形 (7.1.12) によって表現されるものだけではなく，他にも多くの普遍性クラスがあることが知られている．典型的なものとしては，ガウス型直交アンサンブル，ガウス型シンプレクティックアンサンブルの普遍性クラスがある．ブラウン運動モデルは，$N \to \infty$ においては，普遍性クラス間の遷移を記述するのである．

ところで，Wigner の半円則においては，半円の外側では固有値密度がゼロになっている．有限の N においては，もちろんそのようなことはない．小さな確率で固有値は半円の外側に存在するが，$N \to \infty$ の極限では，それが相対的に無限に小さくなってしまうのである．このような場合に，バンドの端はソフトエッジ（soft edge; 柔らかいバンド端）であるという [44, 133]．上の Wigner の半円則においては，$x = \sqrt{2N}$ がソフトエッジになっている．

この節では，ガウス型のブラウン運動モデルに対して，動的相関関数の $N \to \infty$ での漸近形を，分布端の近傍において調べる [48]．この漸近形によって，普遍性クラス間の遷移が記述される．分布端（ソフトエッジ）での相関関数の漸近形がわかれば，その極限として，分布端から離れたバンド内部（bulk; バルク）での相関関数を得ることもできる．

分布端における相関関数の漸近的な振る舞いを調べるために，スケーリング変数 X, Y と t_X, t_Y を，

$$x = \sqrt{2N} + \frac{X}{2^{1/2}N^{1/6}}, \quad y = \sqrt{2N} + \frac{Y}{2^{1/2}N^{1/6}}, \quad \tau_x = \frac{t_X}{N^{1/3}}, \quad \tau_y = \frac{t_Y}{N^{1/3}} \tag{7.1.13}$$

のように導入する．相関関数が，$N \to \infty$ の極限において，スケーリング変数にどのように依存しているかを考える．X, Y が有限ならば，ソフトエッジ近傍を記述していることになることは，上記の半円則の表式から明らかである．

分布端での振る舞いに関係する Hermite 多項式の漸近形としては，$n \to \infty$ において，

$$\mathrm{e}^{-x^2/2}H_n(x) \sim \pi^{1/4}2^{(2n+1)/4}(n!)^{1/2}n^{-1/12}\mathrm{Ai}\left(2^{1/2}n^{1/6}(x-\sqrt{2n})\right) \tag{7.1.14}$$

が知られている [131]．$\mathrm{Ai}(x)$ は Airy 関数

$$\mathrm{Ai}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos\left(\frac{1}{3}t^3 + xt\right)\mathrm{d}t \tag{7.1.15}$$

である．Airy 関数は，虹の理論において導入されたため，「虹積分」と呼ばれることがある [117]．漸近形 (7.1.14) を (7.1.4) に代入すると，漸近形

$$\begin{aligned} K(x,y) &\sim 2^{1/2}N^{1/6}\int_0^\infty \mathrm{d}u\mathrm{Ai}(X+u)\mathrm{Ai}(Y+u) \\ &= 2^{1/2}N^{1/6}\frac{\mathrm{Ai}(X)\mathrm{Ai}'(Y) - \mathrm{Ai}(Y)\mathrm{Ai}'(X)}{X-Y} \end{aligned} \tag{7.1.16}$$

を得る．これは Airy 核 (Airy kernel) と呼ばれ，ユニタリアンサンブルにおいてソフトエッジの近傍を漸近的に記述する．それでは，実対称行列および四元数自己双対エルミート行列の初期条件から出発したとき，ユニタリアンサンブルへの遷移はどのように記述されるか，順次考えていくことにしよう．

7.1.1 実対称行列の初期条件

$N \times N$ 実対称行列のガウス型直交アンサンブルにおいては，固有値の確率分布関数は，(2.1.21) より，

$$p(x_1, \cdots, x_N) \propto \prod_{j=1}^{N} \mathrm{e}^{-x_j^2/2} \prod_{j<l}^{N} |x_j - x_l| \tag{7.1.17}$$

によって与えられる．これは，前章までの議論においては，

$$u(x) = \mathrm{e}^{-x^2} \tag{7.1.18}$$

の場合に相当する．まず，相関関数の表式に含まれる歪直交多項式の具体的な形を与えよう．実対称行列の初期条件に対して，$\tau = 0$ における歪直交多項式 $R_n(x;0)$ は，

$$\begin{aligned} R_{2n}(x;0) &= \frac{1}{2^{2n}} H_{2n}(x) = C_{2n}(x), \\ R_{2n+1}(x;0) &= \frac{1}{2^{2n+1}} H_{2n+1}(x) - \frac{n}{2^{2n-1}} H_{2n-1}(x) \\ &= C_{2n+1}(x) - nC_{2n-1}(x) \end{aligned} \tag{7.1.19}$$

となり，対応する規格化定数は，

$$r_n(0) = 2^{-2n+1}\sqrt{\pi}\,\Gamma(2n+1) \tag{7.1.20}$$

である [83, 103]．$C_n(x)$ を $R_n(x;0)$ によって逆展開すると，

$$\begin{aligned} C_{2n}(x) &= R_{2n}(x;0), \\ C_{2n+1}(x) &= \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!} R_{2j+1}(x;0) \end{aligned} \tag{7.1.21}$$

がわかる．したがって，(6.4.7) で導入した β 行列の要素は，

$$\begin{aligned} \beta_{2n\ 2j} &= \begin{cases} 1, & j = n, \\ 0, & 0 \le j < n, \end{cases} \\ \beta_{2n+1\ 2j+1} &= \frac{n!}{j!}, \quad 0 \le j \le n \end{aligned} \tag{7.1.22}$$

となる．その他の要素はゼロである．

$S(x, y; \tau_x, \tau_y)$ の漸近形

$S_2(x, y; \tau_x, \tau_y)$ の表式 (6.4.12) に β 行列の要素を代入すると,

$$S_2(x, y; \tau_x, \tau_y) = \left[\frac{\Phi_{N-2}(x; \tau_x)}{r_{(N-2)/2}(0)}\mathrm{e}^{\gamma_{N-2}\tau_x} - \mathrm{e}^{-x^2/2}\frac{C_{N-1}(x)\mathrm{e}^{-\gamma_{N-1}\tau_x}}{h_{N-1}}\right] \times \mathrm{e}^{-y^2/2}C_{N-1}(y)\mathrm{e}^{\gamma_{N-1}\tau_y} \tag{7.1.23}$$

を得る．Hermite 多項式の漸近形 (7.1.14) より，$N \to \infty$ においては,

$$\mathrm{e}^{-x^2/2}C_{N-1}(y) \sim ((N-1)!)^{1/2}\pi^{1/4}2^{-(2N-3)/4}N^{-1/12}\mathrm{Ai}(Y) \tag{7.1.24}$$

が得られる．また，(6.4.9) と (7.1.22) より,

$$\frac{\Phi_{N-2}(x; \tau)}{r_{(N-2)/2}(0)}\mathrm{e}^{\gamma_{N-2}\tau} - \mathrm{e}^{-x^2/2}\frac{C_{N-1}(x)\mathrm{e}^{-\gamma_{N-1}\tau}}{h_{N-1}} = \frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{((N-2)/2)!}\mathrm{e}^{-N\tau}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{((N+2j)/2)!}{\sqrt{\pi}(N+2j+1)!}H_{N+2j+1}(x)\mathrm{e}^{-(2j+(3/2))\tau}$$

である．Stirling の公式 (3.2.17) より，$u = 2j/N^{1/3}$ を一定にして $N \to \infty$ の極限をとると,

$$\frac{((N+2j)/2)!}{((N+2j+1)!)^{1/2}}\frac{((N-1)!)^{1/2}}{((N-2)/2)!} \sim 2^{-j-1}$$

である．このことに注意して，Hermite 多項式の漸近形を代入し，和を積分に置き換えると,

$$\frac{\Phi_{N-2}(x; \tau_x)}{r_{(N-2)/2}(0)}\mathrm{e}^{\gamma_{N-2}\tau_x} - \mathrm{e}^{-x^2/2}\frac{C_{N-1}(x)\mathrm{e}^{-\gamma_{N-1}\tau_x}}{h_{N-1}} \sim ((N-1)!)^{-1/2}\mathrm{e}^{-N^{2/3}t_X}N^{1/4}2^{(2N-5)/4}\pi^{-1/4}\int_0^{\infty}\mathrm{d}u\mathrm{e}^{-ut_X}\mathrm{Ai}(X-u) \tag{7.1.25}$$

を得る．これより,

$$S_2(x, y; \tau_x, \tau_y) \sim \mathrm{e}^{N^{2/3}(t_Y - t_X)}2^{-1/2}N^{1/6}\mathrm{Ai}(Y)\int_0^{\infty}\mathrm{d}u\mathrm{e}^{-ut_X}\mathrm{Ai}(X-u) \tag{7.1.26}$$

を導くことができる．

次に，S_1 の漸近形を考えよう．表式 (6.4.11) に Hermite 多項式の漸近形を代入し，和を積分で置き換えると，

$$
\begin{aligned}
&S_1(x,y;\tau_x,\tau_y)\\
&\sim \mathrm{e}^{N^{2/3}(t_Y-t_X)}2^{1/2}N^{1/6}\int_0^\infty \mathrm{d}u\mathrm{Ai}(X+u)\mathrm{Ai}(Y+u)\mathrm{e}^{u(t_X-t_Y)}
\end{aligned}
\tag{7.1.27}
$$

を得る．(7.1.26) と (7.1.27) を加えることにより，

$$
\begin{aligned}
&S(x,y;\tau_x,\tau_y)\mathrm{e}^{N^{2/3}(t_X-t_Y)}2^{-1/2}N^{-1/6}\\
&\sim S^{\mathrm{soft}}(X,Y;t_X,t_Y)\equiv\int_0^\infty \mathrm{d}u\mathrm{Ai}(X+u)\mathrm{Ai}(Y+u)\mathrm{e}^{u(t_X-t_Y)}\\
&+\frac{1}{2}\mathrm{Ai}(Y)\int_0^\infty \mathrm{d}u\mathrm{e}^{-ut_X}\mathrm{Ai}(X-u)
\end{aligned}
\tag{7.1.28}
$$

となる．

<u>$I(x,y;\tau_x,\tau_y)$ の漸近形</u>

(6.4.14) より，$I(x,y;\tau_x,\tau_y)$ は，$\Phi_n(x;\tau)$ を使って書ける．$\Phi_{2n+1}(x;\tau)$ の漸近形を求めるのは，比較的簡単である．β 行列による表式 (6.4.9) より，

$$
\begin{aligned}
&\Phi_{N+2n-1}(y;\tau)\mathrm{e}^{\gamma_{N+2n-1}\tau}\\
&=-\mathrm{e}^{-y^2/2}r_{N/2+n-1}(0)\frac{H_{N+2n-2}(y)}{\pi^{1/2}(N+2n-2)!}\mathrm{e}^{-N\tau}\mathrm{e}^{-(2n-3/2)\tau}
\end{aligned}
\tag{7.1.29}
$$

であり，したがって Hermite 多項式の漸近形 (7.1.14) より，

$$
\begin{aligned}
&\Phi_{N+2n-1}(y;\tau_y)\mathrm{e}^{\gamma_{N+2n-1}\tau_y}\\
&\sim -r_{N/2+n-1}(0)((N+2n-2)!)^{1/2}N^{-1/12}\mathrm{e}^{-N^{2/3}t_Y}2^{(2N+4n-3)/4}\\
&\times\pi^{-1/4}\mathrm{Ai}(Y-s)\mathrm{e}^{-st_Y},\quad s=2n/N^{1/3}
\end{aligned}
\tag{7.1.30}
$$

が得られる．一方，$\Phi_{2n}(x;\tau)$ の漸近形は，(7.1.25) と同様にして導ける．すなわち，

$$\Phi_{N+2n-2}(x;\tau)\mathrm{e}^{\gamma_{N+2n-2}\tau} = \frac{r_{(N+2n-2)/2}(0)\mathrm{e}^{-N\tau}\mathrm{e}^{-x^2/2}}{((N+2n-2)/2)!} \times \sum_{j=n-1}^{\infty} \frac{((N+2j)/2)!H_{2j+N+1}(x)}{\sqrt{\pi}(N+2j+1)!}\mathrm{e}^{-(2j+(3/2))\tau} \tag{7.1.31}$$

に注意すると，

$$\begin{aligned}&\Phi_{N+2n-2}(x;\tau_x)\mathrm{e}^{\gamma_{N+2n-2}\tau_x}\\ &\sim \frac{r_{(N+2n-2)/2}(0)}{((N-1)!)^{1/2}}\frac{((N-2)/2)!}{((N+2n-2)/2)!}N^{1/4}\mathrm{e}^{-N^{2/3}t_X}2^{(2N-5)/4}\\ &\times \pi^{-1/4}\int_s^{\infty}\mathrm{d}u\mathrm{Ai}(X-u)\mathrm{e}^{-ut_X},\quad s=2n/N^{1/3}\end{aligned} \tag{7.1.32}$$

を得る．ここで (7.1.30) と (7.1.32) をかけ合わせ，(6.4.14) に代入して，(7.1.20) によって与えられる $r_n(0)$ の値を代入すると，

$$\begin{aligned}&I(x,y;\tau_x,\tau_y)\mathrm{e}^{N^{2/3}(t_X+t_Y)}\\ &\sim I^{\mathrm{soft}}(X,Y;t_X,t_Y) \equiv \int_0^{\infty}\mathrm{d}s\int_s^{\infty}\mathrm{d}u\left[\mathrm{e}^{-st_X}\mathrm{Ai}(X-s)\mathrm{e}^{-ut_Y}\mathrm{Ai}(Y-u)\right.\\ &\left.-\ \mathrm{e}^{-st_Y}\mathrm{Ai}(Y-s)\mathrm{e}^{-ut_X}\mathrm{Ai}(X-u)\right]\end{aligned} \tag{7.1.33}$$

を得る．

$D(x,y;\tau_x,\tau_y)$ の漸近形

まず，$R_n(x;\tau)$ の漸近形を求めよう．(7.1.19) より，

$$R_{N-2n-2}(x;\tau) = C_{N-2n-2}(x) = 2^{-(N-2n-2)}H_{N-2n-2}(x)$$

を得る．したがって，Hermite 多項式の漸近形から，

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{-x^2/2}R_{N-2n-2}(x;\tau_x)\mathrm{e}^{\gamma_{N-2n-2}\tau_x} \\
&\sim ((N-2n-2)!)^{1/2}N^{-1/12}\mathrm{e}^{N^{2/3}t_X}2^{-(2N-4n-5)/4} \\
&\times \pi^{1/4}\mathrm{e}^{-st_X}\mathrm{Ai}(X+s), \quad s=2n/N^{1/3}
\end{aligned}
\tag{7.1.34}
$$

がわかる．次に，

$$
\begin{aligned}
&R_{2n+1}(x;\tau)\mathrm{e}^{\gamma_{2n+1}\tau} \\
&=2^{-(2n+1)}H_{2n+1}(x)\mathrm{e}^{\gamma_{2n+1}\tau}-n2^{-(2n-1)}H_{2n-1}(x)\mathrm{e}^{\gamma_{2n-1}\tau} \\
&=-\mathrm{e}^{\gamma_{2n+1}\tau}\mathrm{e}^{x^2/2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\mathrm{e}^{-x^2/2}2^{-2n}H_{2n}(x)\right) \\
&\quad -n2^{-(2n-1)}H_{2n-1}(x)(\mathrm{e}^{\gamma_{2n-1}\tau}-\mathrm{e}^{\gamma_{2n+1}\tau})
\end{aligned}
\tag{7.1.35}
$$

に対して (7.1.14) を使うと，漸近形

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{-y^2/2}R_{N-2n-1}(y;\tau_y)\mathrm{e}^{\gamma_{N-2n-1}\tau_y} \\
&\sim ((N-2n-2)!)^{1/2}N^{1/12}\mathrm{e}^{N^{2/3}t_Y}2^{-(2N-4n-7)/4} \\
&\times \pi^{1/4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\mathrm{e}^{-st_Y}\mathrm{Ai}(Y+s)\right), \quad s=2n/N^{1/3}
\end{aligned}
\tag{7.1.36}
$$

を得る．(7.1.34) と (7.1.36) をかけ合わせ，$r_{(N-2n-2)/2}$ で割って n についての和をとることにより，結局，

$$
\begin{aligned}
&D(x,y;\tau_x,\tau_y)\mathrm{e}^{-N^{2/3}(t_X+t_Y)}2^{-1}N^{-1/3} \\
&\sim D^{\mathrm{soft}}(X,Y;t_X,t_Y)\equiv\frac{1}{4}\left[\int_0^\infty \mathrm{d}s\mathrm{e}^{-st_Y}\mathrm{Ai}(Y+s)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left\{\mathrm{e}^{-st_X}\mathrm{Ai}(X+s)\right\}\right. \\
&\left.-\int_0^\infty \mathrm{d}s\mathrm{e}^{-st_X}\mathrm{Ai}(X+s)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left\{\mathrm{e}^{-st_Y}\mathrm{Ai}(Y+s)\right\}\right]
\end{aligned}
\tag{7.1.37}
$$

がわかる．

$\underline{g(x,y;\tau)}$ **の漸近形**

(2.4.41) により，$g(x,y;\tau)$ の表式は，

$$g(x,y;\tau)=\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{\pi^{1/2}2^j j!}H_j(x)H_j(y)\mathrm{e}^{-(j+1/2)\tau} \tag{7.1.38}$$

である．この和は，

$$g(x,y;\tau)=\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2}\frac{\mathrm{e}^{-\tau/2}}{(1-\mathrm{e}^{-2\tau})^{1/2}}\exp\left\{-\frac{\mathrm{e}^{-2\tau}}{1-\mathrm{e}^{-2\tau}}(x-y)^2\right\}$$
$$\times\exp\left\{\frac{2\mathrm{e}^{-\tau}}{1-\mathrm{e}^{-2\tau}}xy\right\} \tag{7.1.39}$$

の形に書くことができるので，その漸近形を評価すると，

$$g(x,y;\tau_x-\tau_y)$$
$$\sim\frac{N^{1/6}}{\sqrt{2(t_X-t_Y)}}\mathrm{e}^{N^{2/3}(t_Y-t_X)}\exp\left\{-\frac{(X-Y)^2}{4(t_X-t_Y)}-\frac{(t_X-t_Y)(X+Y)}{2}\right\} \tag{7.1.40}$$

になる．また，和の中に直接 Hermite 多項式の漸近形を代入することによって，漸近形の別の表現

$$g(x,y;\tau_x-\tau_y)$$
$$\sim\mathrm{e}^{N^{2/3}(t_Y-t_X)}2^{1/2}N^{1/6}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}u\mathrm{Ai}(X+u)\mathrm{Ai}(Y+u)\mathrm{e}^{u(t_X-t_Y)} \tag{7.1.41}$$

が導かれる．$S(x,y;\tau_x,\tau_y)$ の漸近形 (7.1.28) との差をとることにより，

$$\tilde{S}(x,y;\tau_x,\tau_y)\mathrm{e}^{N^{2/3}(t_X-t_Y)}2^{-1/2}N^{-1/6}$$
$$\sim\tilde{S}^{\mathrm{soft}}(X,Y;t_X,t_Y)=-\int_{-\infty}^{0}\mathrm{d}u\mathrm{Ai}(X+u)\mathrm{Ai}(Y+u)\mathrm{e}^{u(t_X-t_Y)}$$
$$+\frac{1}{2}\mathrm{Ai}(Y)\int_0^{\infty}\mathrm{d}u\mathrm{e}^{-ut_X}\mathrm{Ai}(X-u) \tag{7.1.42}$$

を得る．

予備定理 *6.5* により，(7.1.28), (7.1.33), (7.1.37) および (7.1.42) の因子 $\mathrm{e}^{N^{2/3}(t_X \pm t_Y)}$ は，動的相関関数に寄与しない．以後も，四元数行列式表示には，同様の不変性があることに注意すべきである．

7.1.2　自己双対エルミート行列の初期条件

初期条件が，$N/2 \times N/2$ 自己双対エルミート行列のガウス型シンプレクティックアンサンブルによって与えられる場合，その確率分布関数は，

$$p(x_1, \cdots, x_N) \propto \prod_{j=1}^{N/2} \mathrm{e}^{-x_j^2} \prod_{j<l}^{N/2} |x_j - x_l|^4 \prod_{j=1}^{N/2} \delta(x_j - x_{j+(N/2)}) \quad (7.1.43)$$

となる（(2.3.12) 参照）．これにより，ガウス型ユニタリアンサンブルへの遷移において，固有値密度（Wigner の半円則）の幅が一定に保たれる．これは，前章までの議論において，

$$u(x) = \mathrm{e}^{-x^2} \quad (7.1.44)$$

に相当する場合である．

この $u(x)$ に対して，$\tau = 0$ における歪直交多項式およびその規格化定数は，

$$\begin{aligned} R_{2n}(x;0) &= \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!2^{2j}} H_{2j}(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!} C_{2j}(x), \\ R_{2n+1}(x;0) &= \frac{1}{2^{2n+1}} H_{2n+1}(x) = C_{2n+1}(x), \end{aligned} \quad (7.1.45)$$

$$r_n(0) = 2^{-2n} \sqrt{\pi}\, \Gamma(2n+2) \quad (7.1.46)$$

によって与えられる [83, 103]．直交多項式を歪直交多項式によって逆展開すると，

$$\begin{aligned} C_{2n}(x) &= R_{2n}(x;0) - nR_{2n-2}(x;0), \\ C_{2n+1}(x) &= R_{2n+1}(x;0) \end{aligned} \quad (7.1.47)$$

となり，β 行列の要素は，

$$\beta_{2n\ 2j}=\begin{cases}1, & j=n,\\ -n, & j=n-1,\\ 0, & 0\le j<n-1,\end{cases}$$

$$\beta_{2n+1\ 2j+1}=\begin{cases}1, & j=n,\\ 0, & 0\le j<n\end{cases} \tag{7.1.48}$$

以外はすべてゼロになる．

$S(x,y;\tau_x,\tau_y)$ の漸近形

β 行列の具体的な形 (7.1.48) を $S_2(x,y;\tau_x,\tau_y)$ の表式 (6.4.12) に代入すると，

$$S_2(x,y;\tau_x,\tau_y)=-\frac{N\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}}{2}\frac{C_N(x)\mathrm{e}^{-\gamma_N\tau_x}}{h_N}R_{N-2}(y;\tau_y)\mathrm{e}^{\gamma_{N-2}\tau_y} \tag{7.1.49}$$

となる．$C_N(x)$ の漸近形は，Hermite 多項式の漸近形から容易に求めることができる．具体的には，(7.1.24) において $N-1$ を N に置き換えればよい．より難しいのは，$R_{N-2}(y;\tau)$ の方である．その漸近形を導くために，恒等式

$$\sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{j!2^{2j}}\frac{1}{c^j}H_{2j}(x)=-\frac{\alpha}{(4c)^n}\mathrm{e}^{\alpha x^2}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{d}u\mathrm{e}^{-\alpha u^2}H_{2n+1}(u) \tag{7.1.50}$$

($c=(1-\alpha)/\alpha$) を使うことができる．この恒等式は，両辺に $\mathrm{e}^{-\alpha x^2}$ をかけてから微分することにより証明できる．$c=\mathrm{e}^{-2\tau}$ とおいて，$R_{2n}(y;0)$ の表式 (7.1.45) と比較することにより，

$$\begin{aligned}&R_{2n}(y;\tau)\mathrm{e}^{\gamma_{2n}\tau}\\&=\frac{\mathrm{e}^{\tau/2}}{1+\mathrm{e}^{-2\tau}}\frac{1}{(2\mathrm{e}^{-\tau})^{2n}}\mathrm{e}^{y^2/(1+\mathrm{e}^{-2\tau})}\int_{y}^{\infty}\mathrm{d}u\mathrm{e}^{-u^2/(1+\mathrm{e}^{-2\tau})}H_{2n+1}(u)\end{aligned} \tag{7.1.51}$$

を得る．次に，u を $(2N)^{1/2}+u$ に置き換えて，Hermite 多項式の漸近形を代入すると，

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{-y^2/2}R_{N-2n}(y;\tau_y)\mathrm{e}^{\gamma_{N-2n}\tau_y} \\
&\sim ((N-2n+1)!)^{1/2}N^{-1/4}\mathrm{e}^{N^{2/3}t_Y}2^{-(2N-4n+3)/4} \\
&\times \pi^{1/4}\mathrm{e}^{Yt_Y}\int_{Y+s}^{\infty}\mathrm{d}u\mathrm{e}^{-ut_Y}\mathrm{Ai}(u), \quad s=2n/N^{1/3}
\end{aligned}
\tag{7.1.52}
$$

を求めることができる．$S_2(x,y;\tau_x,\tau_y)$ の漸近形を評価するのに必要なのは，$n=1$ $(s=0)$ の場合だけである．一般の n に対する形は，後で $D(x,y;\tau_x,\tau_y)$ の漸近形を求めるのに使う．必要な漸近形がそろったので，$S_2(x,y;\tau_x,\tau_y)$ の表式 (6.4.12) に代入すると，

$$
\begin{aligned}
&S_2(x,y;\tau_x,\tau_y) \\
&\sim -\mathrm{e}^{N^{2/3}(t_Y-t_X)}2^{-1/2}N^{1/6}\mathrm{Ai}(X)\int_0^{\infty}\mathrm{d}u\mathrm{e}^{-ut_Y}\mathrm{Ai}(Y+u)
\end{aligned}
\tag{7.1.53}
$$

を得る．$S_1(x,y;\tau_x,\tau_y)$ の漸近形は，実対称行列の初期条件のときと共通であり，(7.1.27) によって与えられる．したがって，

$$
\begin{aligned}
&S(x,y;\tau_x,\tau_y)\mathrm{e}^{N^{2/3}(t_X-t_Y)}2^{-1/2}N^{-1/6} \\
&\sim S^{\mathrm{soft}}(X,Y;t_X,t_Y)\equiv\int_0^{\infty}\mathrm{d}u\mathrm{Ai}(X+u)\mathrm{Ai}(Y+u)\mathrm{e}^{u(t_X-t_Y)} \\
&-\frac{1}{2}\mathrm{Ai}(X)\int_0^{\infty}\mathrm{d}u\mathrm{e}^{-ut_Y}\mathrm{Ai}(Y+u)
\end{aligned}
\tag{7.1.54}
$$

である．

$I(x,y;\tau_x,\tau_y)$ の漸近形

関数 $\Phi_{2n+1}(x;\tau)$ の表式 (6.4.9) に β 行列の要素を代入すると，

$$\begin{aligned}
&\Phi_{2n+1}(x;\tau)\mathrm{e}^{\gamma_{2n+1}\tau} \\
&= \mathrm{e}^{-x^2/2}2^{-2n}\left\{\frac{1}{2}H_{2n+2}(x)\mathrm{e}^{-\gamma_{2n+2}\tau} - (2n+1)H_{2n}(x)\mathrm{e}^{-\gamma_{2n}\tau}\right\} \\
&= -\mathrm{e}^{-\gamma_{2n}\tau}2^{-2n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{\mathrm{e}^{-x^2/2}H_{2n+1}(x)\right\} \\
&\quad +2^{-2n-1}\mathrm{e}^{-x^2/2}H_{2n}(x)(\mathrm{e}^{-\gamma_{2n+2}\tau} - \mathrm{e}^{-\gamma_{2n}\tau})
\end{aligned} \tag{7.1.55}$$

となることに注意する．Hermite 多項式の漸近形を使うことにより，

$$\begin{aligned}
&\Phi_{N-2n-1}(x;\tau_x)\mathrm{e}^{\gamma_{N-2n-1}\tau_x} \\
&\sim -((N-2n-1)!)^{1/2}N^{1/12}\mathrm{e}^{-N^{2/3}t_X}2^{-(2N-4n-9)/4} \\
&\times \pi^{1/4}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left\{\mathrm{e}^{st_X}\mathrm{Ai}(X+s)\right\}, \quad s = 2n/N^{1/3}
\end{aligned} \tag{7.1.56}$$

を得る．同様に，$\Phi_{2n}(x;\tau)$ の表式に β 行列の要素を代入すると，

$$\frac{1}{r_n(0)}\Phi_{2n}(x;\tau)\mathrm{e}^{\gamma_{2n}\tau} = \mathrm{e}^{-x^2/2}\frac{H_{2n+1}(x)\mathrm{e}^{-\gamma_{2n+1}\tau}}{\pi^{1/2}(2n+1)!} \tag{7.1.57}$$

となる．したがって，その漸近形は，

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{r_{N/2-n-1}(0)}\Phi_{N-2n-2}(y;\tau_y)\mathrm{e}^{\gamma_{N-2n-2}\tau_y} \\
&\sim ((N-2n-1)!)^{-1/2}N^{-1/12}\mathrm{e}^{-N^{2/3}t_Y}2^{(2N-4n-1)/4} \\
&\times \pi^{-1/4}\mathrm{e}^{st_Y}\mathrm{Ai}(Y+s), \quad s = 2n/N^{1/3}
\end{aligned} \tag{7.1.58}$$

である．(7.1.56) と (7.1.58) をかけ合わせ，$I(x,y;\tau_x,\tau_y)$ の表式 (6.4.14) にしたがって和をとると，

$$\begin{aligned}
&I(x,y;\tau_x,\tau_y)\mathrm{e}^{N^{2/3}(t_X+t_Y)} \\
&\sim I^{\mathrm{soft}}(X,Y;t_X,t_Y) \equiv \int_0^\infty \mathrm{d}s\mathrm{e}^{-st_X}\mathrm{Ai}(X-s)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left\{\mathrm{e}^{-st_Y}\mathrm{Ai}(Y-s)\right\} \\
&- \int_0^\infty \mathrm{d}s\mathrm{e}^{-st_Y}\mathrm{Ai}(Y-s)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left\{\mathrm{e}^{-st_X}\mathrm{Ai}(X-s)\right\}
\end{aligned} \tag{7.1.59}$$

を得る．

$\underline{D(x,y;\tau_x,\tau_y)}$ **の漸近形**

必要になるのは，$R_{2n}(x;\tau)$ と $R_{2n+1}(x;\tau)$ の漸近形である．前者は，(7.1.52) によって与えられる．後者に対しては，(7.1.45) より，

$$\frac{1}{r_n(0)} R_{2n+1}(x;\tau) = \frac{H_{2n+1}(x)}{2\sqrt{\pi}\,\Gamma(2n+2)} \tag{7.1.60}$$

に注意すると，(7.1.14) を使って，

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{r_{N/2-n}(0)} R_{N-2n+1}(x;\tau_x)\mathrm{e}^{\gamma_{N-2n+1}\tau_x} \\
&\sim \frac{\mathrm{e}^{N^{2/3}t_X}}{2\sqrt{\pi}} \frac{\mathrm{e}^{-st_X}}{(\Gamma(N-2n+2))^{1/2}} \pi^{1/4} 2^{(2N-4n+3)/4} N^{-1/12} \mathrm{Ai}(X+s), \\
&s = 2n/N^{1/3}
\end{aligned} \tag{7.1.61}$$

を得る．(7.1.52) と (7.1.61) を，$D(x,y;\tau_x,\tau_y)$ の表式 (6.3.6) に代入すると，

$$\begin{aligned}
&D(x,y;\tau_x,\tau_y)\mathrm{e}^{-N^{2/3}(t_X+t_Y)} 2^{-1} N^{-1/3} \\
&\sim D^{\mathrm{soft}}(X,Y;t_X,t_Y) \\
&\equiv \frac{1}{4}\int_0^\infty \mathrm{d}s \int_s^\infty \mathrm{d}u \left[\mathrm{e}^{-st_Y}\mathrm{Ai}(Y+s)\mathrm{e}^{-ut_X}\mathrm{Ai}(X+u)\right. \\
&\left. - \mathrm{e}^{-st_X}\mathrm{Ai}(X+s)\mathrm{e}^{-ut_Y}\mathrm{Ai}(Y+u)\right]
\end{aligned} \tag{7.1.62}$$

となることがわかる．

$\underline{g(x,y;\tau)}$ **の漸近形**

$g(x,y;\tau)$ は，実対称行列の初期条件のときと共通なので，その漸近形は，

$$\begin{aligned}
&g(x,y;\tau_x-\tau_y) \\
&\sim \mathrm{e}^{N^{2/3}(t_Y-t_X)} 2^{1/2} N^{1/6} \int_{-\infty}^\infty \mathrm{d}u \mathrm{Ai}(X+u)\mathrm{Ai}(Y+u)\mathrm{e}^{u(t_X-t_Y)}
\end{aligned} \tag{7.1.63}$$

になる．$S(x, y; \tau_x, \tau_y)$ の漸近形 (7.1.54) との差をとることにより，

$$\tilde{S}(x, y; \tau_x, \tau_y)\mathrm{e}^{N^{2/3}(t_X - t_Y)}2^{-1/2}N^{-1/6}$$
$$\sim \tilde{S}^{\mathrm{soft}}(X, Y; t_X, t_Y) \equiv -\int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}u \mathrm{Ai}(X+u)\mathrm{Ai}(Y+u)\mathrm{e}^{u(t_X - t_Y)}$$
$$-\frac{1}{2}\mathrm{Ai}(X)\int_0^{\infty} \mathrm{d}u \mathrm{e}^{-ut_Y}\mathrm{Ai}(Y+u) \tag{7.1.64}$$

を得る．

7.1.3 バルク極限

ソフトエッジにおいて求められた相関関数が，バンドの内部ではどのような振る舞いをするかをみてみよう．そのためには，$X, Y \to -\infty$ の極限（バルク極限）を考えればよい．具体的には，スケーリング変数 ω, ω' を，

$$X = -\left(\alpha + \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}\omega\right), \quad Y = -\left(\alpha + \frac{\pi}{\sqrt{\alpha}}\omega'\right) \tag{7.1.65}$$

のように導入し，$\alpha \to \infty$ の極限をとる．

まず，$S(x, y; \tau_x, \tau_y)$ と $\tilde{S}(x, y; \tau_x, \tau_y)$ の漸近形 (7.1.28), (7.1.42), (7.1.54) および (7.1.64) をとりあげよう．まず，変数 u についての積分を，$0 < u < \alpha$ に対応する部分と $\alpha < u < \infty$ に対応する部分に分ける．そのとき，後者からの寄与はないことに着目して，u を $\alpha(1 - v^2)$ に置き換えることにより，新しい積分変数 v を導入する．そして，$x \to \infty$ の極限における Airy 関数 $\mathrm{Ai}(-x)$ の極限形

$$\mathrm{Ai}(-x) \sim \frac{1}{\pi^{1/2}x^{1/4}}\cos\left(\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{\pi}{4}\right) \tag{7.1.66}$$

を使う．その結果，$S^{\mathrm{soft}}(X, Y; t_X, t_Y)$ と $\tilde{S}^{\mathrm{soft}}(X, Y; t_X, t_Y)$ は，実対称行列，自己双対エルミート行列の初期条件のいずれに対しても，

$$S^{\mathrm{bulk}}(\omega,\omega';t,t') \equiv \lim_{\alpha\to\infty} (\pi/\sqrt{\alpha}) S^{\mathrm{soft}}(X,Y;t/\alpha,t'/\alpha)$$
$$= \mathrm{e}^{-(t-t')} \int_0^1 \mathrm{d}v \cos(\pi v(\omega-\omega'))\, \mathrm{e}^{-v^2(t-t')} \tag{7.1.67}$$

および

$$\tilde{S}^{\mathrm{bulk}}(\omega,\omega';t,t') \equiv \lim_{\alpha\to\infty} (\pi/\sqrt{\alpha}) \tilde{S}^{\mathrm{soft}}(X,Y;t/\alpha,t'/\alpha)$$
$$= -\mathrm{e}^{-(t-t')} \int_1^\infty \mathrm{d}v \cos(\pi v(\omega-\omega'))\, \mathrm{e}^{-v^2(t-t')} \tag{7.1.68}$$

のバルク極限形をもつことがわかる．

$I^{\mathrm{soft}}(X,Y;t_X,t_Y)$ と $D^{\mathrm{soft}}(X,Y;t_X,t_Y)$ は，初期条件によって異なるバルク極限形をもつ．実対称行列の初期条件に対しては，Airy 関数の極限形を，再び表式 (7.1.33) および (7.1.37) に対して使うと，

$$I^{\mathrm{bulk}}(\omega,\omega';t,t') \equiv \lim_{\alpha\to\infty} (\pi/2) I^{\mathrm{soft}}(X,Y;t/\alpha,t'/\alpha)$$
$$= \mathrm{e}^{t+t'} \int_1^\infty \mathrm{d}v \frac{\mathrm{e}^{-v^2(t+t')}}{v} \sin(\pi v(\omega-\omega')) \tag{7.1.69}$$

および

$$D^{\mathrm{bulk}}(\omega,\omega';t,t') \equiv \lim_{\alpha\to\infty} (2\pi/\alpha) D^{\mathrm{soft}}(X,Y;t/\alpha,t'/\alpha)$$
$$= \mathrm{e}^{-(t+t')} \int_0^1 \mathrm{d}v v \mathrm{e}^{v^2(t+t')} \sin(\pi v(\omega-\omega')) \tag{7.1.70}$$

を得る．一方，自己双対エルミート行列の初期条件に対しては，(7.1.59) と (7.1.62) の極限形を同様に計算すると，

$$I^{\mathrm{bulk}}(\omega,\omega';t,t') \equiv \lim_{\alpha\to\infty}(\pi/(2\alpha))I^{\mathrm{soft}}(X,Y;t/\alpha,t'/\alpha)$$
$$= \mathrm{e}^{t+t'}\int_1^\infty \mathrm{d}v v \mathrm{e}^{-v^2(t+t')}\sin\left(\pi v(\omega-\omega')\right) \tag{7.1.71}$$

および

$$D^{\mathrm{bulk}}(\omega,\omega';t,t') \equiv \lim_{\alpha\to\infty}(2\pi)D^{\mathrm{soft}}(X,Y;t/\alpha,t'/\alpha)$$
$$= \mathrm{e}^{-(t+t')}\int_0^1 \mathrm{d}v\frac{\mathrm{e}^{v^2(t+t')}}{v}\sin\left(\pi v(\omega-\omega')\right) \tag{7.1.72}$$

が求まる.

とくに，初期状態すなわち $t=t'=0$ のときは，ガウス型直交アンサンブルおよびガウス型シンプレクティックアンサンブルのバルク固有値相関関数として，よく知られている．また，$t=t'\to\infty$ の極限をとると，ガウス型ユニタリアンサンブルのバルク固有値相関関数になる．カオス系やランダム系の物理学においては，これらのバルク相関がよくとりあげられてきたが，最近では，バンド端における相関や動的相関の重要性も高まっている [71, 98, 114].

7.2 ハードエッジの漸近形

次に，カイラルガウス型アンサンブルの相関関数の漸近形を考えよう．カイラルガウス型アンサンブルにおいては，A が $M\times N$ $(M\geq N)$ ランダム行列でその要素が独立にガウス分布しているとき，$N\times N$ エルミート行列 $B=A^\dagger A$ の固有値の確率分布関数を考える.

第 5 章の章末問題において，Hilbert 変換の方法により，カイラルガウス型アンサンブルの固有値密度の $N\to\infty$ における漸近形が,

$$\rho(x) \sim \begin{cases} 0, & 0 < x < Nb_-, \\ \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\sqrt{(Nb_+ - x)(x - Nb_-)}}{x}, & Nb_- < x < Nb_+, \\ 0, & x > Nb_+ \end{cases} \tag{7.2.1}$$

によって与えられることを示した．ここで，$b_\pm$ は，

$$\bar{\alpha} = \lim_{M,N\to\infty} \frac{M-N}{2N} \tag{7.2.2}$$

を使って，

$$b_\pm = 2(\bar{\alpha} + 1 \pm \sqrt{2\bar{\alpha}+1}) \quad \text{(複合同順)} \tag{7.2.3}$$

のように定義される．ここで，バンド端 $x = Nb_\pm$ は，ガウス型アンサンブルの固有値密度に現れたのと同じソフトエッジである．

ところが，このアンサンブルは，もう 1 つ性質の異なるバンド端をつくることができる．行列 A の行の数と列の数の差 $M-N$ が，N の程度の大きさでなく，もっと小さいときには，$\bar{\alpha}=0$ であり，固有値密度の漸近形は，

$$\rho(x) \sim \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi\sqrt{x}}\sqrt{4N-x}, & 0 < x < 4N, \\ 0, & x > 4N \end{cases} \tag{7.2.4}$$

になる．このとき，固有値密度における一方のバンド端 $x = 4N$ は，Wigner の半円則に現れたのと同じソフトエッジであるが，もう 1 つのバンド端 $x = 0$ は性質が異なっている．このバンド端は，行列 $B = A^\dagger A$ の固有値が負になり得ないことから生じている．すなわち，その外側では，N が有限のときでも，固有値密度が厳密にゼロになる．このようなバンド端はハードエッジ (hard edge; 硬いバンド端) と呼ばれ，その近傍では，ソフトエッジにおけるのとは異なる固有値の振る舞いがみられる [44, 95, 101, 102, 134, 138].

この節では，カイラルガウス型のブラウン運動モデルに対して，動的相関関数の $N \to \infty$ での漸近形を調べる．分布端（ハードエッジ）での相関関数の漸近形から，分布端から離れたバンド内部（バルク）での相関関数を極限形として得ることもできる．とくに，パラメータ

$$a = M - N \tag{7.2.5}$$

が固定されているとき，ハードエッジ近傍での動的相関関数の漸近形は a に依存することがわかる．今後の議論は，a を連続変数とみなしたときにも，そのまま成立する．

まず，ユニタリアンサンブルから議論を始めよう．カイラルガウス型ユニタリアンサンブルにおいて，A が $M \times N$ $(M \geq N)$ 複素行列であるとき，$N \times N$ 行列 $B = A^\dagger A$ の固有値の確率分布関数は，

$$p(x_1, \cdots, x_N) \propto \prod_{j=1}^{N} \mathrm{e}^{-x} x^{M-N} \prod_{j<l}^{N} |x_j - y_j|^2 \tag{7.2.6}$$

によって与えられる（(5.2.20) 参照）．これは，前章の議論における，

$$w(x) = \mathrm{e}^{-x} x^a \tag{7.2.7}$$

の場合に相当するから，相関関数 $\rho(x_1, \cdots, x_n)$ は，行列式

$$\rho(x_1, \cdots, x_n) = \det[K(x_j, x_l)]_{j,l=1,2,\cdots,n} \tag{7.2.8}$$

の形に書ける．関数 $K(x, y)$ は，

$$\begin{aligned} K(x,y) &= (xy)^{a/2} \mathrm{e}^{-(x+y)/2} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{h_j} C_j(x) C_j(y) \\ &= (xy)^{a/2} \mathrm{e}^{-(x+y)/2} \frac{1}{h_{N-1}} \frac{C_N(x) C_{N-1}(y) - C_{N-1}(x) C_N(y)}{x - y} \end{aligned} \tag{7.2.9}$$

によって定義される．ただし，多項式 $C_n(x)$ の直交関係は，

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} x^a C_m(x) C_n(x) \mathrm{d}x = h_n \delta_{mn} \tag{7.2.10}$$

となる．この直交多項式 $C_n(x)$ は，Laguerre 多項式 $L_n^{(a)}(x)$ の定数倍であり，

$$C_n(x) = (-1)^n n! L_n^{(a)}(x), \quad h_n = \Gamma(n+1)\Gamma(n+a+1) \tag{7.2.11}$$

のように書ける．

ハードエッジ近傍での相関関数を調べるために，スケーリング変数 X,Y と t_X,t_Y を，

$$x=\frac{X}{4N},\quad y=\frac{Y}{4N},\quad \tau_x=\frac{t_X}{2N},\quad \tau_y=\frac{t_Y}{2N} \tag{7.2.12}$$

のように導入する．X が有限のときには，明らかに x はハードエッジ（すなわち $x=0$）の近傍にある．

Laguerre 多項式に対しては，漸近公式

$$L_n^{(a)}(x)\sim\left(\frac{n}{x}\right)^{a/2}J_a(2\sqrt{nx}),\quad n\to\infty \tag{7.2.13}$$

が成立する [131]．ここで，$J_a(x)$ は Bessel 関数

$$J_a(x)=\frac{(x/2)^a}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(a+(1/2))}\int_0^\pi\cos(x\cos\theta)\sin^{2a}\theta\mathrm{d}\theta \tag{7.2.14}$$

である．この漸近公式を $K(x,y)$ の表式 (7.2.9) に代入すると，

$$\begin{aligned}K(x,y)&\sim N\int_0^1\mathrm{d}uJ_a(\sqrt{uX})J_a(\sqrt{uY})\\&=N\frac{\sqrt{X}J_{a+1}(\sqrt{X})J_a(\sqrt{Y})-\sqrt{Y}J_{a+1}(\sqrt{Y})J_a(\sqrt{X})}{2(X-Y)}\end{aligned} \tag{7.2.15}$$

を得る．これは，Bessel 核 (Bessel kernel) と呼ばれ，カイラルガウス型ユニタリアンサンブルにおいて，ハードエッジ近傍での相関関数を漸近的に記述する．ハードエッジ近傍において，相関関数は，ソフトエッジ近傍とはまったく異なる振る舞いをすること，そして，その振る舞いはパラメータ a に依存することがわかる．以下では，実行列および実四元数行列の初期条件から出発したとき，ユニタリアンサンブルへの遷移がどのように生じるかを考える．

7.2.1 実行列の初期条件

$M \times N$ 実行列 A の初期条件の場合，(5.1.18) より，確率分布関数

$$p(x_1, \cdots, x_N) \propto \prod_{j=1}^{N} \mathrm{e}^{-x_j/2} x_j^{(M-N-1)/2} \prod_{j<l}^{N} |x_j - y_j| \tag{7.2.16}$$

が，$\tau = 0$ での $N \times N$ 行列 $B = A^{\mathrm{T}} A$ の固有値分布を与えることに注意する．これは，前章までの議論の中では，

$$u(x) = \mathrm{e}^{-x} x^{a-1}, \quad a = M - N \tag{7.2.17}$$

の場合に相当する．ガウス型アンサンブルに対しては，$u(x) = w(x)$ が成り立っていたのに対し，カイラルガウス型アンサンブルではそうならないことに注目してもらいたい．このとき，$\tau = 0$ での歪直交多項式の表式は，

$$\begin{aligned} R_{2n}(x;0) &= (2n)! L_{2n}^{(a)}(x) = C_{2n}(x), \\ R_{2n+1}(x;0) &= -(2n+1)! L_{2n+1}^{(a)}(x) + (2n)!(a+2n) L_{2n-1}^{(a)}(x) \\ &= C_{2n+1}(x) - (2n)(a+2n) C_{2n-1}(x) \end{aligned} \tag{7.2.18}$$

となることが知られている [103]．対応する規格化定数は，

$$r_n(0) = 4\Gamma(2n+1)\Gamma(a+2n+1) \tag{7.2.19}$$

である．歪直交多項式の表式を逆に解くと，

$$\begin{aligned} C_{2n}(x) &= R_{2n}(x;0), \\ C_{2n+1}(x) &= \sum_{j=0}^{n} 2^{2(n-j)} \frac{n!(n+(a/2))!}{j!(j+(a/2))!} R_{2j+1}(x;0) \end{aligned} \tag{7.2.20}$$

が得られる．したがって，β 行列の要素は，

$$\beta_{2n\ 2j} = \begin{cases} 1, & j = n, \\ 0, & 0 \le j < n, \end{cases}$$
$$\beta_{2n+1\ 2j+1} = 2^{2(n-j)} \frac{n!(n+(a/2))!}{j!(j+(a/2))!}, \quad 0 \le j \le n \tag{7.2.21}$$

を除いてゼロとなる．

<u>$S(x, y; \tau_x, \tau_y)$ の漸近形</u>

β 行列の表式を $S_2(x, y; \tau_x, \tau_y)$ の表式 (6.4.12) に代入すると，ただちに，

$$S_2(x, y; \tau_x, \tau_y) = \frac{x^{a/2} e^{-x/2} y^{a/2} e^{-y/2}}{2^{N-2}((N-2)/2)!((a+N-2)/2)!} C_{N-1}(y) e^{\gamma_{N-1}\tau_y} \times \sum_{j=N/2}^{\infty} \frac{C_{2j+1}(x) e^{-\gamma_{2j+1}\tau_x}}{h_{2j+1}} 2^{2j} j! \left(\frac{a}{2} + j\right)! \tag{7.2.22}$$

を得る．さらに，$\Phi_{2n}(x; \tau)$ の表式 (6.4.9) を使うと，

$$S_2(x, y; \tau_x, \tau_y) = \frac{y^{a/2} e^{-y/2}}{2^{N-2}((N-2)/2)!((a+N-2)/2)!} C_{N-1}(y) e^{\gamma_{N-1}\tau_y} \times \frac{2^N (N/2)!((a+N)/2)!}{r_{N/2}(0)} \Phi_N(x; \tau) e^{\gamma_N \tau_x} \tag{7.2.23}$$

となる．すなわち，$C_{2n+1}(x)$ と $\Phi_{2n}(x; \tau)$ の $n \to \infty$ における漸近形がわかれば $S_2(x, y; \tau_x, \tau_y)$ の漸近形を導くことができる．$C_{2n+1}(x)$ の漸近形は，Laguerre 多項式の漸近形 (7.2.13) より， ただちにわかる．$\Phi_{2n}(x; \tau)$ については，再び (6.4.9) を使うと，

$$\Phi_{2n}(x; \tau) e^{\gamma_{2n}\tau} = -\frac{x^{a/2} e^{-x/2} r_n(0)}{2^{2n} n!((a+2n)/2)!} \sum_{j=n}^{\infty} \frac{2^{2j} j!((a+2j)/2)!}{(a+2j+1)!} L_{2j+1}^{(a)}(x) e^{-\gamma_{2j+1}\tau} \tag{7.2.24}$$

になることに着目し，Laguerre 多項式の漸近形 (7.2.13) を代入して，和を積分に置き換えると，

$$\begin{aligned}&\Phi_{2n}(x;\tau)\mathrm{e}^{\gamma_{2n}\tau}\\&\sim -\frac{r_n(0)\sqrt{\pi n}}{2^{2n+(a+2)/2}n!((a+2n)/2)!}\int_1^\infty \mathrm{d}u\frac{\mathrm{e}^{-ut}}{\sqrt{u}}J_a(2\sqrt{2nux}),\\&t=4n\tau\end{aligned}\tag{7.2.25}$$

を得る．これを使うと，$S_2(x,y;\tau_x,\tau_y)$ の漸近形は，

$$S_2(x,y;\tau_x,\tau_y)\sim\frac{N}{2}J_a(\sqrt{Y})\mathrm{e}^{t_Y}\int_1^\infty \mathrm{d}u\frac{\mathrm{e}^{-ut_X}}{\sqrt{u}}J_a(\sqrt{uX})\tag{7.2.26}$$

となる．

一方，S_1 の漸近形も，Laguerre 多項式の漸近形から，

$$S_1(x,y;\tau_x,\tau_y)\sim N\int_0^1 \mathrm{d}uJ_a(\sqrt{uX})J_a(\sqrt{uY})\mathrm{e}^{-u(t_X-t_Y)}\tag{7.2.27}$$

のように評価される．$S(x,y;\tau_x,\tau_y)$ は S_1 と S_2 の和なので，その漸近形は，

$$\begin{aligned}&S(x,y;\tau_x,\tau_y)/N\\&\sim S^{\mathrm{hard}}(X,Y;t_X,t_Y)\equiv\int_0^1 \mathrm{d}uJ_a(\sqrt{uX})J_a(\sqrt{uY})\mathrm{e}^{-u(t_X-t_Y)}\\&+\frac{1}{2}J_a(\sqrt{Y})\mathrm{e}^{t_Y}\int_1^\infty \mathrm{d}u\frac{\mathrm{e}^{-ut_X}}{\sqrt{u}}J_a(\sqrt{uX})\end{aligned}\tag{7.2.28}$$

と結論される．

$I(x,y;\tau_x,\tau_y)$ の漸近形

$I(x,y;\tau_x,\tau_y)$ の漸近形を評価するためには，$\Phi_{2n}(x;\tau)$ と $\Phi_{2n+1}(x;\tau)$ の漸近形を知る必要がある．$\Phi_{2n}(x;\tau)$ の漸近形はすでに評価した．$\Phi_{2n+1}(x;\tau)$ の漸近形は，

$$\begin{aligned}\Phi_{2n+1}(x;\tau)\mathrm{e}^{\gamma_{2n+1}\tau}&=-4x^{a/2}\mathrm{e}^{-x/2}C_{2n}(x)\mathrm{e}^{-\gamma_{2n}\tau}\\&\sim -4\mathrm{e}^{-\gamma_{2n}\tau}(2n)!(2n)^{a/2}J_a(2\sqrt{2nx})\end{aligned}\tag{7.2.29}$$

であることが容易にわかる．これらの漸近形を，$I(x,y;\tau_x,\tau_y)$ の表式 (6.4.14) に代入すると，

$$
\begin{aligned}
&I(x,y;\tau_x,\tau_y)/N \\
&\sim I^{\mathrm{hard}}(X,Y;t_X,t_Y) \equiv \int_1^\infty \mathrm{d}s \int_1^\infty \mathrm{d}u \left[\frac{\mathrm{e}^{-sut_X}}{\sqrt{u}} J_a(\sqrt{suX})\mathrm{e}^{-st_Y} J_a(\sqrt{sY})\right. \\
&\left. - \frac{\mathrm{e}^{-sut_Y}}{\sqrt{u}} J_a(\sqrt{suY})\mathrm{e}^{-st_X} J_a(\sqrt{sX})\right] \qquad (7.2.30)
\end{aligned}
$$

が得られる．

$D(x,y;\tau_x,\tau_y)$ の漸近形

次は，$D(x,y;\tau_x,\tau_y)$ の漸近形を考える．まず，$R_{2n}(x;\tau)$ の漸近形の評価は簡単で，

$$
x^{a/2}\mathrm{e}^{-x/2}R_{2n}(x;\tau) = x^{a/2}\mathrm{e}^{-x/2}(2n)!L_{2n}^{(a)}(x) \sim (2n)!(2n)^{a/2}J_a(2\sqrt{2nx}) \qquad (7.2.31)
$$

となる．$R_{2n+1}(x;\tau)$ については，以下のように変形を行う．

$$
\begin{aligned}
&R_{2n+1}(x;\tau) \\
&= -(2n)!\left[(2n+1)L_{2n+1}^{(a)}(x)\mathrm{e}^{\gamma_{2n+1}\tau} - (2n+a)L_{2n-1}^{(a)}(x)\mathrm{e}^{\gamma_{2n-1}\tau}\right] \\
&= -(2n)!\left[x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{L_{2n+1}^{(a)}(x) + L_{2n}^{(a)}(x)\right\} + (a+1)L_{2n}^{(a)}(x)\right]\mathrm{e}^{\gamma_{2n+1}\tau} \\
&\quad -(2n)!(2n+a)L_{2n-1}^{(a)}(x)\left(\mathrm{e}^{\gamma_{2n+1}\tau} - \mathrm{e}^{\gamma_{2n-1}\tau}\right). \qquad (7.2.32)
\end{aligned}
$$

ここで，

$$
\mathrm{e}^{\gamma_{2n+1}\tau} - \mathrm{e}^{\gamma_{2n-1}\tau} = \mathrm{e}^{(4n+a+3)\tau} - \mathrm{e}^{(4n+a-1)\tau} \sim 4\tau\mathrm{e}^{4n\tau} \qquad (7.2.33)
$$

であることに注意して，漸近形を評価すると，

$$
\begin{aligned}
&x^{a/2}\mathrm{e}^{-x/2}R_{2n+1}(x;\tau) \\
&\sim -2(2n)!2^{a/2}n^{(a+1)/2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\left[n^{1/2}J_a(2\sqrt{2nx})\mathrm{e}^{4n\tau}\right] \qquad (7.2.34)
\end{aligned}
$$

を得る．整数 n を連続変数のようにみなして微分を行うことにより，表式が簡単になっている．以上で得られた $R_{2n}(x;\tau)$ と $R_{2n+1}(x;\tau)$ の漸近形を $D(x,y;\tau_x,\tau_y)$ の表式 (6.3.6) に代入すると，

$$
\begin{aligned}
&D(x,y;\tau_x,\tau_y)/N \\
&\sim D^{\mathrm{hard}}(X,Y;t_X,t_Y) \equiv \frac{1}{4}\int_0^1 \mathrm{d}s \left[J_a(\sqrt{sY})\mathrm{e}^{st_Y} s\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left\{J_a(\sqrt{sX})\mathrm{e}^{st_X}\right\}\right. \\
&\left. - \ J_a(\sqrt{sX})\mathrm{e}^{st_X} s\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left\{J_a(\sqrt{sY})\mathrm{e}^{st_Y}\right\}\right] \qquad (7.2.35)
\end{aligned}
$$

となる．

<u>$g(x,y;\tau)$ の漸近形</u>

$g(x,y;\tau)$ は，Laguerre 多項式を用いて，

$$
g(x,y;\tau) = (xy)^{a/2}\mathrm{e}^{-(x+y)/2}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{j!}{(j+a)!}L_j^{(a)}(x)L_j^{(a)}(y)\mathrm{e}^{-\gamma_j\tau} \qquad (7.2.36)
$$

と書ける．この和を評価すると，

$$
\begin{aligned}
g(x,y;\tau) &= \mathrm{e}^{-(x+y)/2}\mathrm{e}^{-(2a+1)\tau}\left(1-\mathrm{e}^{-2\tau}\right)^{-1} \\
&\times \exp\left\{-\frac{\mathrm{e}^{-2\tau}}{1-\mathrm{e}^{-2\tau}}(x+y)\right\} I_a\left(2\frac{\sqrt{xy}\mathrm{e}^{-\tau}}{1-\mathrm{e}^{-2\tau}}\right) \qquad (7.2.37)
\end{aligned}
$$

となることが知られている．ここで，$I_a(x)$ は変形 Bessel 関数である．これにより，漸近形

$$
g(x,y;\tau_x,\tau_y) \sim \frac{N}{t_X-t_Y}\exp\left(-\frac{X+Y}{t_X-t_Y}\right) I_a\left(\frac{\sqrt{XY}}{2(t_X-t_Y)}\right) \qquad (7.2.38)
$$

を求めることができる．一方，和の中に Laguerre 多項式の漸近形 (7.2.13) を代入すると，漸近形の別の表現

$$
g(x,y;\tau_x-\tau_y) \sim N\int_0^{\infty} J_a(\sqrt{uX})J_a(\sqrt{uY})\mathrm{e}^{-u(t_X-t_Y)}\mathrm{d}u \qquad (7.2.39)
$$

を得る．これにより，$\tilde{S}(x,y;\tau_x,\tau_y)$ の漸近形は，

$$\begin{aligned}
&\tilde{S}(x,y;\tau_x,\tau_y)/N \\
&\sim \tilde{S}^{\mathrm{hard}}(X,Y;t_X,t_Y) \equiv -\int_1^\infty \mathrm{d}u J_a(\sqrt{uX})J_a(\sqrt{uY})\mathrm{e}^{-u(t_X-t_Y)} \\
&+\frac{1}{2}J_a(\sqrt{Y})\mathrm{e}^{t_Y}\int_1^\infty \mathrm{d}u\frac{\mathrm{e}^{-ut_X}}{\sqrt{u}}J_a(\sqrt{uX}) \qquad (7.2.40)
\end{aligned}$$

となる．

7.2.2　実四元数行列の初期条件

$M/2\times N/2$ 実四元数行列 A の初期条件の場合，$\tau=0$ での $N/2\times N/2$ 四元数行列 $B=A^\dagger A$ の固有値分布は（M,N は偶数），確率分布関数

$$p(x_1,\cdots,x_N)\propto\prod_{j=1}^{N/2}\mathrm{e}^{-x_j}x_j^{M-N+1}\prod_{j<l}^{N/2}|x_j-y_j|^4\prod_{j=1}^{N/2}\delta(x_j-x_{j+N/2}) \qquad (7.2.41)$$

によって与えられる（(5.3.21) 参照）．これは，

$$u(x)=\mathrm{e}^{-x}x^{a+1},\quad a=M-N \qquad (7.2.42)$$

の場合に相当し，$\tau=0$ における歪直交多項式は，

$$\begin{aligned}
R_{2n}(x;0)&=n!2^{2n}(n+(a/2))!\sum_{j=0}^{n}\frac{(2j)!}{j!2^{2j}(j+(a/2))!}L_{2j}^{(a)}(x)\\
&=n!2^{2n}(n+(a/2))!\sum_{j=0}^{n}\frac{1}{j!2^{2j}(j+(a/2))!}C_{2j}(x),\\
R_{2n+1}(x;0)&=-(2n+1)!L_{2n+1}^{(a)}(x)=C_{2n+1}(x) \qquad (7.2.43)
\end{aligned}$$

によって与えられる [103]．対応する規格化定数は，

$$r_n(0)=\Gamma(2n+2)\Gamma(2n+a+2) \qquad (7.2.44)$$

である．ただちに，

$$
\begin{aligned}
C_{2n}(x) &= R_{2n}(x;0) - (2n)(2n+a)R_{2n-2}(x;0), \\
C_{2n+1}(x) &= R_{2n+1}(x;0)
\end{aligned}
\tag{7.2.45}
$$

が導かれるので，β 行列の要素は，

$$
\begin{aligned}
\beta_{2n\ 2j} &= \begin{cases} 1, & j=n, \\ -(2n)(2n+a), & j=n-1, \\ 0, & 0 \le j < n-1, \end{cases} \\
\beta_{2n+1\ 2j+1} &= \begin{cases} 1, & j=n, \\ 0, & 0 \le j < n \end{cases}
\end{aligned}
\tag{7.2.46}
$$

以外はすべてゼロになる．

$S(x,y;\tau_x,\tau_y)$ の漸近形

β 行列の値を $S_2(x,y;\tau_x,\tau_y)$ の表式 (6.4.12) に代入すると，

$$
\begin{aligned}
&S_2(x,y;\tau_x,\tau_y) \\
&= -(xy)^{a/2}\mathrm{e}^{-(x+y)/2}\frac{C_N(x)\mathrm{e}^{-\gamma_N\tau_x}}{h_N}N(N+a)R_{N-2}(y;\tau_y)\mathrm{e}^{\gamma_{N-2}\tau_y}
\end{aligned}
\tag{7.2.47}
$$

を得る．したがって，$C_n(x)$ と $R_{2n}(x;\tau)$ の $n\to\infty$ での漸近形が必要である．$C_n(x)$ の漸近形は Laguerre 多項式の漸近形からすぐにわかる．問題は，$R_{2n}(x;\tau)$ の漸近形であるが，Laguerre 多項式の漸近形を使い，和を積分に置き換えることによって，

$$
\begin{aligned}
&x^{a/2}\mathrm{e}^{-x/2}R_{2n}(x;\tau)\mathrm{e}^{\gamma_{2n}\tau} \\
&= x^{a/2}\mathrm{e}^{-x/2}n!2^{2n}(n+(a/2))!\sum_{j=0}^{n}\frac{(2j)!\mathrm{e}^{\gamma_{2j}\tau}}{j!2^{2j}(j+(a/2))!}L_{2j}^{(a)}(x) \\
&\sim 2^{2n}n!(n+(a/2))!2^{a/2}\sqrt{\frac{n}{\pi}}\int_0^1 \mathrm{d}u\frac{\mathrm{e}^{ut}}{\sqrt{u}}J_a(2\sqrt{2nux}), \quad t=4n\tau
\end{aligned}
\tag{7.2.48}
$$

となる．以上の結果から，$S_2(x,y;\tau_x,\tau_y)$ の漸近形は，

$$
S_2(x,y;\tau_x,\tau_y) \sim -\frac{N}{2}J_a(\sqrt{X})\mathrm{e}^{-t_X}\int_0^1 \mathrm{d}u\frac{\mathrm{e}^{ut_Y}}{\sqrt{u}}J_a(\sqrt{uY}) \tag{7.2.49}
$$

によって与えられる．$S_1(x,y;\tau_x,\tau_y)$ は，実行列の初期条件のときと共通なので，その漸近形は (7.2.27) によって与えられる．したがって，$S(x,y;\tau_x,\tau_y)$ の漸近形は，

$$
\begin{aligned}
&S(x,y;\tau_x,\tau_y)/N \\
&\sim S^{\mathrm{hard}}(X,Y;t_X,t_Y) \equiv \int_0^1 \mathrm{d}uJ_a(\sqrt{uX})J_a(\sqrt{uY})\mathrm{e}^{-u(t_X-t_Y)} \\
&- \frac{1}{2}J_a(\sqrt{X})\mathrm{e}^{-t_X}\int_0^1 \mathrm{d}u\frac{\mathrm{e}^{ut_Y}}{\sqrt{u}}J_a(\sqrt{uY})
\end{aligned}
\tag{7.2.50}
$$

である．

<u>$I(x,y;\tau_x,\tau_y)$ の漸近形</u>

まず，$\Phi_{2n}(x;\tau)$ の漸近形は容易に評価できて，

$$
\begin{aligned}
&\Phi_{2n}(x;\tau)\mathrm{e}^{\gamma_{2n}\tau} \\
&= -x^{a/2}\mathrm{e}^{-x/2}r_n(0)\frac{(2n+1)!}{h_{2n+1}}L_{2n+1}^{(a)}(x)\mathrm{e}^{-\gamma_{2n+1}\tau} \\
&\sim -\mathrm{e}^{-\gamma_{2n+1}\tau}(2n+1)!(2n)^{a/2}J_a(2\sqrt{2nx})
\end{aligned}
\tag{7.2.51}
$$

となることに注意する．一方，$\Phi_{2n+1}(x;\tau)$ の漸近形を評価するために，次

のような変形を行う.

$$
\begin{aligned}
&\Phi_{2n+1}(x;\tau)\mathrm{e}^{\gamma_{2n+1}\tau}x^{-a/2}\mathrm{e}^{x/2}\Gamma(2n+a+2)/r_n(0)\\
&=(2n+2)L_{2n+2}^{(a)}(x)\mathrm{e}^{-\gamma_{2n+2}\tau}-(2n+a+1)L_{2n}^{(a)}(x)\mathrm{e}^{-\gamma_{2n}\tau}\\
&=\left[x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left\{L_{2n+2}^{(a)}(x)+L_{2n+1}^{(a)}(x)\right\}+(a+1)L_{2n+1}^{(a)}(x)\right]\mathrm{e}^{-\gamma_{2n}\tau}\\
&\quad+(2n+2)L_{2n+2}^{(a)}(x)(\mathrm{e}^{-\gamma_{2n+2}\tau}-\mathrm{e}^{-\gamma_{2n}\tau}) \qquad (7.2.52)
\end{aligned}
$$

最後の項において,

$$
\mathrm{e}^{-\gamma_{2n+2}\tau}-\mathrm{e}^{-\gamma_{2n}\tau}=\mathrm{e}^{-(4n+a+5)\tau}-\mathrm{e}^{-(4n+a+1)\tau}\sim-4\tau\mathrm{e}^{-4n\tau} \qquad (7.2.53)
$$

であることを考慮しながら, Laguerre 多項式の漸近形を代入すると, $\Phi_{2n+1}(x;\tau)$ の漸近形は,

$$
\begin{aligned}
&\Phi_{2n+1}(x;\tau)\mathrm{e}^{\gamma_{2n+1}\tau}\\
&\sim\frac{r_n(0)}{\Gamma(2n+a+2)}2^{(a+2)/2}n^{(a+1)/2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\left[n^{1/2}J_a(2\sqrt{2nx})\mathrm{e}^{-4n\tau}\right]
\end{aligned}
\qquad (7.2.54)
$$

となる. 以上で得られた $\Phi_{2n}(x;\tau)$ と $\Phi_{2n+1}(x;\tau)$ の漸近形を表式 (6.4.14) に代入することにより,

$$
\begin{aligned}
&I(x,y;\tau_x,\tau_y)/N\\
&\sim I^{\mathrm{hard}}(X,Y;t_X,t_Y)\equiv\int_1^\infty\mathrm{d}s\left[J_a(\sqrt{sY})\mathrm{e}^{-st_Y}s\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left\{J_a(\sqrt{sX})\mathrm{e}^{-st_X}\right\}\right.\\
&\left.-\ J_a(\sqrt{sX})\mathrm{e}^{-st_X}s\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left\{J_a(\sqrt{sY})\mathrm{e}^{-st_Y}\right\}\right] \qquad (7.2.55)
\end{aligned}
$$

を得る.

$\underline{D(x,y;\tau_x,\tau_y)}$ **の漸近形**

$D(x,y;\tau_x,\tau_y)$ の漸近形を得るために必要なのは，$R_{2n}(x;\tau)$ と $R_{2n+1}(x;\tau)$ の漸近形である．$R_{2n}(x;\tau)$ の漸近形は，すでに (7.2.48) において評価した．$R_{2n+1}(x;\tau)$ は $C_{2n+1}(x)$ に等しいので，その漸近形は，Laguerre 多項式の漸近形からただちに求められる．これらの漸近形を表式 (6.3.6) に代入して，和を積分に置き換えると，

$$
\begin{aligned}
&D(x,y;\tau_x,\tau_y)/N \\
&\sim D^{\mathrm{hard}}(X,Y;t_X,t_Y) \equiv \frac{1}{4}\int_0^1 \mathrm{d}s \int_0^1 \mathrm{d}u \left[\frac{\mathrm{e}^{sut_Y}}{\sqrt{u}} J_a(\sqrt{suY})\mathrm{e}^{st_X} J_a(\sqrt{sX})\right. \\
&\left. - \frac{\mathrm{e}^{sut_X}}{\sqrt{u}} J_a(\sqrt{suX})\mathrm{e}^{st_Y} J_a(\sqrt{sY})\right]
\end{aligned}
\tag{7.2.56}
$$

$\underline{g(x,y;\tau)}$ **の漸近形**

$g(x,y;\tau)$ は，実行列の初期条件のときと共通であり，漸近形

$$
g(x,y;\tau_x-\tau_y) \sim N\int_0^\infty J_a(\sqrt{uX})J_a(\sqrt{uY})\mathrm{e}^{-u(t_X-t_Y)}\mathrm{d}u \tag{7.2.57}
$$

をもつ．したがって，$\tilde{S}(x,y;\tau_x,\tau_y)$ の漸近形は，

$$
\begin{aligned}
&\tilde{S}(x,y;\tau_x,\tau_y)/N \\
&\sim \tilde{S}^{\mathrm{hard}}(X,Y;t_X,t_Y) \equiv -\int_1^\infty \mathrm{d}u J_a(\sqrt{uX})J_a(\sqrt{uY})\mathrm{e}^{-u(t_X-t_Y)} \\
&- \frac{1}{2}J_a(\sqrt{X})\mathrm{e}^{-t_X}\int_0^1 \mathrm{d}u \frac{\mathrm{e}^{ut_Y}}{\sqrt{u}} J_a(\sqrt{uY})
\end{aligned}
\tag{7.2.58}
$$

である．

7.2.3　バルク極限

カイラルガウス型アンサンブルの固有値相関関数のバンド内部での振る舞いをみるためには，$X, Y \to \infty$ の極限（バルク極限）をとる必要がある．そ

のために，スケーリング変数 ω, ω' を，

$$X = \alpha + 2\pi\sqrt{\alpha}\omega, \quad Y = \alpha + 2\pi\sqrt{\alpha}\omega' \tag{7.2.59}$$

のように導入し，$\alpha \to \infty$ の極限を考える．

まず，$S(x, y; \tau_x, \tau_y)$ と $\tilde{S}(x, y; \tau_x, \tau_y)$ の漸近形 (7.2.28), (7.2.40), (7.2.50) および (7.2.58) をとりあげる．変数 u を v^2 に置き換え，$x \to \infty$ の極限における Bessel 関数 $J_a(x)$ の極限形

$$J_a(x) \sim \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \cos\left(x - \frac{\pi}{2}a - \frac{\pi}{4}\right) \tag{7.2.60}$$

を使うと，実行列，実四元数行列の初期条件の両方について，

$$\begin{aligned} S^{\text{bulk}}(\omega, \omega'; t, t') &\equiv \lim_{\alpha\to\infty} (\pi\sqrt{\alpha}/2) S^{\text{hard}}(X, Y; t, t') \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}v \cos\left(\pi v(\omega - \omega')\right) \mathrm{e}^{-v^2(t-t')} \end{aligned} \tag{7.2.61}$$

および

$$\begin{aligned} \tilde{S}^{\text{bulk}}(\omega, \omega'; t, t') &\equiv \lim_{\alpha\to\infty} (\pi\sqrt{\alpha}/2) \tilde{S}^{\text{hard}}(X, Y; t, t') \\ &= -\int_1^\infty \mathrm{d}v \cos\left(\pi v(\omega - \omega')\right) \mathrm{e}^{-v^2(t-t')} \end{aligned} \tag{7.2.62}$$

を得る．

ガウス型のときと同様に，$I^{\text{hard}}(X, Y; t_X, t_Y)$ と $D^{\text{hard}}(X, Y; t_X, t_Y)$ のバルク極限形は，初期条件によって異なる．実行列の初期条件に対しては，Bessel 関数の極限形を (7.2.30) および (7.2.35) に対して使うことにより，

$$\begin{aligned} I^{\text{bulk}}(\omega, \omega'; t, t') &\equiv \lim_{\alpha\to\infty} (-\pi\alpha/8) I^{\text{hard}}(X, Y; t, t') \\ &= \int_1^\infty \mathrm{d}v \frac{\mathrm{e}^{-v^2(t+t')}}{v} \sin\left(\pi v(\omega - \omega')\right) \end{aligned} \tag{7.2.63}$$

および

$$D^{\mathrm{bulk}}(\omega,\omega';t,t') \equiv \lim_{\alpha\to\infty}(-2\pi)D^{\mathrm{hard}}(X,Y;t,t') = \int_0^1 \mathrm{d}v v \mathrm{e}^{v^2(t+t')}\sin\left(\pi v(\omega-\omega')\right) \quad (7.2.64)$$

を求めることができる．同様に，自己双対エルミート行列の初期条件に対して，(7.2.55) と (7.2.56) の極限形は，

$$I^{\mathrm{bulk}}(\omega,\omega';t,t') \equiv \lim_{\alpha\to\infty}(-\pi/2)I^{\mathrm{hard}}(X,Y;t,t') = \int_1^\infty \mathrm{d}v v \mathrm{e}^{-v^2(t+t')}\sin\left(\pi v(\omega-\omega')\right) \quad (7.2.65)$$

および

$$D^{\mathrm{bulk}}(\omega,\omega';t,t') \equiv \lim_{\alpha\to\infty}(-\pi\alpha/2)D^{\mathrm{hard}}(X,Y;t,t') = \int_0^1 \mathrm{d}v \frac{\mathrm{e}^{v^2(t+t')}}{v}\sin\left(\pi v(\omega-\omega')\right) \quad (7.2.66)$$

になる．

予備定理 *6.5* より，ハードエッジのバルク極限形は，ソフトエッジのバルク極限形とまったく同じ形になり，バルク極限形が強い普遍性をもっていることが示唆される．

7.3　分布端の固有値密度

分布端の固有値分布の著しい特徴は，固有値密度の漸近形が，ランダム行列の対称性に依存する普遍的な形をもつことである [4, 48, 102, 125]．バルク領域では相関関数（固有値密度のゆらぎ）をみなければ行列の対称性が区別できない．そのため，この事実の発見は大きな進展であった．この章を締めくくるにあたって，それぞれの対称性に対応する固有値密度の形をまとめておこう．

ソフトエッジにおける固有値密度の漸近形は，(7.1.28) および (7.1.54) より，エルミート行列，実対称行列，自己双対エルミート行列のそれぞれに対して，

$$
\begin{aligned}
\rho(x)2^{-1/2}N^{-1/6} &\sim \int_0^\infty \mathrm{d}u\mathrm{Ai}(X+u)\mathrm{Ai}(X+u), \\
\rho(x)2^{-1/2}N^{-1/6} &\sim \int_0^\infty \mathrm{d}u\mathrm{Ai}(X+u)\mathrm{Ai}(X+u) \\
&\quad + \frac{1}{2}\mathrm{Ai}(X)\int_0^\infty \mathrm{d}u\mathrm{Ai}(X-u), \\
\rho(x)2^{-1/2}N^{-1/6} &\sim \int_0^\infty \mathrm{d}u\mathrm{Ai}(X+u)\mathrm{Ai}(X+u) \\
&\quad - \frac{1}{2}\mathrm{Ai}(X)\int_0^\infty \mathrm{d}u\mathrm{Ai}(X+u)
\end{aligned}
\tag{7.3.1}
$$

によって与えられる．

ハードエッジにおける固有値密度の漸近形は，(7.2.28) および (7.2.50) より，複素行列，実行列，実四元数行列のそれぞれに対して，

$$
\begin{aligned}
\rho(x)/N &\sim \int_0^1 \mathrm{d}uJ_a(\sqrt{uX})J_a(\sqrt{uX}), \\
\rho(x)/N &\sim \int_0^1 \mathrm{d}uJ_a(\sqrt{uX})J_a(\sqrt{uX}) + \frac{1}{2}J_a(\sqrt{X})\int_1^\infty \mathrm{d}u\frac{1}{\sqrt{u}}J_a(\sqrt{uX}), \\
\rho(x)/N &\sim \int_0^1 \mathrm{d}uJ_a(\sqrt{uX})J_a(\sqrt{uX}) - \frac{1}{2}J_a(\sqrt{X})\int_0^1 \mathrm{d}u\frac{1}{\sqrt{u}}J_a(\sqrt{uX})
\end{aligned}
\tag{7.3.2}
$$

によって与えられる．

章末問題

[1] 第 6 章の章末問題 [2] の結果において，

$$x \mapsto x/\lambda,\ a \mapsto \lambda^2,\ b \mapsto \lambda^2$$

あるいは，

$$x \mapsto 1-(2x/\lambda),\ a \mapsto a-1,\ b \mapsto \lambda$$

の置き換えを行い，さらに $\lambda \to \infty$ の極限をとることによって，歪直交多項式の表式 (7.1.19) および (7.2.18) を導出せよ．

[2] 第 6 章の章末問題 [4] の結果から，上の [1] と同様の方法により，歪直交多項式の表式 (7.1.45) および (7.2.43) を導出せよ．

第 8 章　円アンサンブル

次に，Dyson によって導入された円アンサンブルを考える [29]．円アンサンブルは，ユニタリ行列のランダム行列アンサンブルであり，最も単純な構造をもつ．また，カオス的な時間発展演算子 [58] のモデルとして，物理学に応用される．ガウス型アンサンブルと同様，直交，ユニタリ，シンプレクティックの 3 つの型があり，それぞれ，対称ユニタリ行列，ユニタリ行列，自己双対四元数ユニタリ行列に対応している [29, 84]．さらに，これらの 3 つの型の間を結び，また，同じ型の内部での外部パラメータに対する応答を記述するブラウン運動モデルについても解説する [30, 97]．

8.1　円直交アンサンブル

円直交アンサンブルは，対称ユニタリ行列のランダム行列アンサンブルである．$N \times N$ 対称ユニタリ行列 S は，ユニタリ行列 U によって，

$$S = U^{\mathrm{T}} U \tag{8.1.1}$$

のように分解できることが知られている．このとき，S の要素の微分を要素とする行列 $\mathrm{d}S$ は，

$$\mathrm{d}S = \mathrm{d}U^{\mathrm{T}}U + U^{\mathrm{T}}\mathrm{d}U = iU^{\mathrm{T}}\mathrm{d}MU \tag{8.1.2}$$

となる．ここで，

$$i\mathrm{d}M = U^{*}\mathrm{d}U^{\mathrm{T}} + \mathrm{d}UU^{\dagger} \tag{8.1.3}$$

である．U がユニタリ行列であることから，$\mathrm{d}M$ は実対称行列になることが容易にわかる．円直交アンサンブルは，$\mathrm{d}M$ の各要素が，互いに独立に，等しい重みで分布しているとみなすことによって定義される．

円直交アンサンブルを定義する測度は，ガウス型直交アンサンブルのときと同様に，

$$(\mathrm{d}M) = \prod_{j=1}^{N} \mathrm{d}M_{jj} \prod_{j<l}^{N} \mathrm{d}M_{jl} \tag{8.1.4}$$

になる．ところで，対称ユニタリ行列 S のユニタリ行列 U による分解は，一意的ではない．任意の直交行列 O に対して，U を OU で置き換える任意性がある．これによって，$\mathrm{d}M$ は，

$$\mathrm{d}M' = O\mathrm{d}MO^{\mathrm{T}} \tag{8.1.5}$$

に変わる．しかし，ガウス型直交アンサンブルに対する議論において明らかにしたように，$(\mathrm{d}M) = (O\mathrm{d}MO^{\mathrm{T}})$ なので，この任意性によって円直交アンサンブルの定義が変わることはない．

対称ユニタリ行列 S は，さらに，

$$S = O\Theta O^{\mathrm{T}} \tag{8.1.6}$$

のように分解することができる．ここで，O は直交行列，Θ は，(j, j) 成分が $\mathrm{e}^{i\theta_j}$ （θ_j は実数）で与えられる対角行列である．微分 $\mathrm{d}S$ を計算して，O^{T} を左から，O を右からかけると，

$$O^{\mathrm{T}}\mathrm{d}SO = O^{\mathrm{T}}\mathrm{d}O\Theta + \Theta\mathrm{d}O^{\mathrm{T}}O + \mathrm{d}\Theta \tag{8.1.7}$$

を得る．一方，$\mathrm{d}M$ の定義により，

$$O^{\mathrm{T}}\mathrm{d}SO = i(UO)^{\mathrm{T}}\mathrm{d}M(UO) \tag{8.1.8}$$

となる．U を，$U = \Theta^{1/2}O^{\mathrm{T}}$ のように選ぶことにより，これら 2 つの式から，

$$\mathrm{d}M = -i\Theta^{-1/2}O^{\mathrm{T}}\mathrm{d}O\Theta^{1/2} - i\Theta^{1/2}\mathrm{d}O^{\mathrm{T}}O\Theta^{-1/2} - i\Theta^{-1}\mathrm{d}\Theta \tag{8.1.9}$$

が導かれる．(8.1.9) 式の右辺の (j,l) 成分 $(j \leq l)$ の外積を計算することにより，測度 $(\mathrm{d}M)$ を計算することができる．O が直交行列であることから，$O^{\mathrm{T}}\mathrm{d}O = -\mathrm{d}O^{\mathrm{T}}O$ になることに注意すると，結局，

$$(\mathrm{d}M) = \prod_{j<l}^{M} |\mathrm{e}^{\theta_j} - \mathrm{e}^{\theta_l}| \prod_{j=1}^{N} \mathrm{d}\theta_j \prod_{j<l}^{N} [O^{\mathrm{T}}\mathrm{d}O]_{jl} \tag{8.1.10}$$

である．これが，ただちに円直交アンサンブルの確率分布関数を与える．

8.2 円ユニタリアンサンブル

次に，円ユニタリアンサンブルを考える．円ユニタリアンサンブルは，ユニタリ行列のランダム行列アンサンブルである．任意の $N \times N$ ユニタリ行列 S は，ユニタリ行列 U と V によって，

$$S = UV \tag{8.2.1}$$

のように分解できる．前と同じように，S の要素の微分を要素とする行列 $\mathrm{d}S$ を計算すると，

$$\mathrm{d}S = \mathrm{d}UV + U\mathrm{d}V = iU\mathrm{d}MV \tag{8.2.2}$$

となる．ここで，

$$i\mathrm{d}M = U^{\dagger}\mathrm{d}U + \mathrm{d}VV^{\dagger} \tag{8.2.3}$$

である．U, V はユニタリ行列なので，$\mathrm{d}M$ はエルミート行列になる．円ユニタリアンサンブルにおいては，$\mathrm{d}M$ の各要素の実部と虚部が，互いに独立に等しい重みで分布する．

そこで，円ユニタリアンサンブルを定義する測度は，ガウス型ユニタリアンサンブルのときと同様に，

$$(\mathrm{d}M) = \prod_{j=1}^{N} \mathrm{d}M_{jj} \prod_{j<l}^{N} \mathrm{d}M_{jl}^{R} \mathrm{d}M_{jl}^{I} \tag{8.2.4}$$

になる．ユニタリ行列 S のユニタリ行列 U, V による分解 $S = UV$ は，一意的ではない．任意のユニタリ行列 W に対して，U を $UW^\dagger$, V を WV で置き換える任意性がある．これによって，$\mathrm{d}M$ は，

$$\mathrm{d}M' = W\mathrm{d}MW^\dagger \tag{8.2.5}$$

に変わる．ところが，ガウス型ユニタリアンサンブルに対する議論において明らかにしたように，$(\mathrm{d}M) = (W\mathrm{d}MW^\dagger)$ であり，円ユニタリアンサンブルの定義は，この任意性の影響を受けない．

ユニタリ行列 S を，

$$S = W\Theta W^\dagger \tag{8.2.6}$$

のように分解することもできる．ここで，W はユニタリ行列で，対角行列 Θ の (j, j) 成分は $\mathrm{e}^{i\theta_j}$ （θ_j は実数）で与えられる．微分 $\mathrm{d}S$ を計算して，$W^\dagger$ を左から，W を右からかけると，

$$W^\dagger \mathrm{d}SW = W^\dagger \mathrm{d}W\Theta + \Theta \mathrm{d}W^\dagger W + \mathrm{d}\Theta \tag{8.2.7}$$

になる．$\mathrm{d}M$ の定義により，

$$W^\dagger \mathrm{d}SW = iW^\dagger U\mathrm{d}MVW \tag{8.2.8}$$

も得られる．これら 2 つの式より，U, V を，$U = W\Theta^{1/2}$, $V = \Theta^{1/2}W^\dagger$ のように選べば，

$$\mathrm{d}M = -i\Theta^{-1/2}W^\dagger \mathrm{d}W\Theta^{1/2} - i\Theta^{1/2}\mathrm{d}W^\dagger W\Theta^{-1/2} - i\Theta^{-1}\mathrm{d}\Theta \tag{8.2.9}$$

が導かれる．測度 $(\mathrm{d}M)$ を計算するためには，(8.2.9) 式の右辺の (j,j) 成分と (j,l) 成分 $(j<l)$ の実部，虚部の外積を計算すればよい．W がユニタリ行列であることから，$W^\dagger \mathrm{d}W = -\mathrm{d}W^\dagger W$ なので，結局，

$$(\mathrm{d}M) = \prod_{j<l}^{M} |\mathrm{e}^{\theta_j} - \mathrm{e}^{\theta_l}|^2 \prod_{j=1}^{N} \mathrm{d}\theta_j \prod_{j<l}^{N} [W^\dagger \mathrm{d}W]_{jl}^R [W^\dagger \mathrm{d}W]_{jl}^I \qquad (8.2.10)$$

である．これにより，円ユニタリアンサンブルの確率分布関数が与えられる．

8.3　円シンプレクティックアンサンブル

円シンプレクティックアンサンブルは，自己双対四元数ユニタリ行列のランダム行列アンサンブルとして定義される．$N \times N$ 自己双対四元数ユニタリ行列 S は，自己双対性

$$S = \bar{S} \qquad (8.3.1)$$

とユニタリ性

$$S^\dagger S = SS^\dagger = I \quad (I \text{ は単位行列}) \qquad (8.3.2)$$

を満足する $N \times N$ 四元数行列である．これらは，四元数ユニタリ行列 U $(U^\dagger U = UU^\dagger = I)$ によって，

$$S = \bar{U}U \qquad (8.3.3)$$

のように分解できることが知られている．S の要素の微分を要素とする行列 $\mathrm{d}S$ は，

$$\mathrm{d}S = \mathrm{d}\bar{U}U + \bar{U}\mathrm{d}U = i\bar{U}\mathrm{d}MU \qquad (8.3.4)$$

となる．ここで，

$$i\mathrm{d}M = U^* \mathrm{d}\bar{U} + \mathrm{d}UU^\dagger \qquad (8.3.5)$$

である．U のユニタリ性を使うと，$\mathrm{d}M$ は自己双対エルミート行列になることが示される．自己双対エルミート行列の要素は実四元数である（1.1 節参

照)．円シンプレクティックアンサンブルにおいては，$\mathrm{d}M$ の 要素の $0,1,2,3$ 成分が，互いに独立に等しい重みで分布している．

円シンプレクティックアンサンブルを定義する測度は，

$$(\mathrm{d}M)=\prod_{j=1}^{N}\mathrm{d}M_{jj}\prod_{j<l}^{N}\prod_{k=0}^{3}\mathrm{d}M_{jl}^{(k)} \tag{8.3.6}$$

になる．自己双対四元数ユニタリ行列 S のユニタリ行列 U による分解は，一意的ではなく，任意のシンプレクティック行列 B に対して U を BU で置き換える任意性がある．このために，$\mathrm{d}M$ は，

$$\mathrm{d}M'=B\mathrm{d}M\bar{B} \tag{8.3.7}$$

に変わる．しかし，ガウス型シンプレクティックアンサンブルに対する議論において示したように，$(\mathrm{d}M)=(B\mathrm{d}M\bar{B})$ となる．したがって，円シンプレクティックアンサンブルの定義は，U の任意性のために変わることはない．

自己双対四元数ユニタリ行列 S の分解として，

$$S=B\Theta\bar{B} \tag{8.3.8}$$

も，知られている．B はシンプレクティック行列，Θ は，(j,j) 成分が $\mathrm{e}^{i\theta_j}$ (θ_j は実数) で与えられる対角行列である．微分 $\mathrm{d}S$ を計算して，$\bar{B}$ を左から，B を右からかけることにより，

$$\bar{B}\mathrm{d}SB=\bar{B}\mathrm{d}B\Theta+\Theta\mathrm{d}\bar{B}B+\mathrm{d}\Theta \tag{8.3.9}$$

が示される．一方，

$$\bar{B}\mathrm{d}SB=i\bar{B}\bar{U}\mathrm{d}MUB \tag{8.3.10}$$

である．U を，$U=\Theta^{1/2}\bar{B}$ のように選ぶと，これら 2 つの式から，

$$\mathrm{d}M=-i\Theta^{-1/2}\bar{B}\mathrm{d}B\Theta^{1/2}-i\Theta^{1/2}\mathrm{d}\bar{B}B\Theta^{-1/2}-i\Theta^{-1}\mathrm{d}\Theta \tag{8.3.11}$$

がわかるので，この式の右辺の (j,j) 成分と (j,l) 成分 $(j<l)$ の第 $0,1,2,3$ 成分の外積を求めることにより，測度 $(\mathrm{d}M)$ が得られる．B はシンプレク

ティック行列なので，$\bar{B}\mathrm{d}B = -\mathrm{d}\bar{B}B$ であることに注意して計算を進めると，円シンプレクティックアンサンブルの確率分布関数

$$(\mathrm{d}M) = \prod_{j<l}^{M} |\mathrm{e}^{\theta_j} - \mathrm{e}^{\theta_l}|^4 \prod_{j=1}^{N} \mathrm{d}\theta_j \prod_{j<l}^{N} \prod_{k=0}^{3} [\bar{B}\mathrm{d}B]_{jl}^{(k)} \tag{8.3.12}$$

が導かれる．

8.4 ブラウン運動モデル

円アンサンブルに対するブラウン運動モデルも，Dyson によって導入された [30]．Dyson によれば，ユニタリ行列のブラウン運動は，ガウス型アンサンブルやカイラルガウス型アンサンブルのときと同様に，Fokker-Planck 方程式

$$\frac{\partial p}{\partial \tau} = \mathcal{L}p, \quad \mathcal{L} = \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \left(\frac{\partial W}{\partial \theta_j} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \right) = \frac{1}{\beta} \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \mathrm{e}^{-\beta W} \frac{\partial}{\partial \theta_j} \mathrm{e}^{\beta W} \tag{8.4.1}$$

によって記述される．ここで，$\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_N$ は，本章のこれまでの節で導入したユニタリ行列の固有パラメータであり，ブラウン運動を行う粒子の位置とみなされる．τ はブラウン運動を記述するための時刻パラメータである．重み関数 W は，

$$W = -\sum_{j<l}^{N} \log \left| \mathrm{e}^{i\theta_j} - \mathrm{e}^{i\theta_l} \right| \tag{8.4.2}$$

で与えられる．Dyson は，摂動論に基づいた議論を行い，この Fokker-Planck 方程式が，ユニタリ行列の固有パラメータの運動を自然に記述することを示した．

ブラウン運動の定常分布関数が，

$$p_S = \mathrm{e}^{-\beta W} = \prod_{j<l}^{N} \left| \mathrm{e}^{i\theta_j} - \mathrm{e}^{i\theta_l} \right|^{\beta} \tag{8.4.3}$$

で与えられることは，それが $\partial p_S/\partial\tau = 0$ を満足することからわかる．したがって，パラメータ $\beta = 1, 2, 4$ をもつブラウン運動は，長時間極限 $\tau \to \infty$ において，それぞれ，円直交アンサンブル，円ユニタリアンサンブル，円シンプレクティックアンサンブルに近づく振る舞いを示す．

Fokker-Planck 方程式を解くためには，2.4 節，5.4 節で行ったのと同様に，Fokker-Planck 演算子 $\mathcal{L}$ をエルミート演算子 $\mathcal{H}$ に変換すると有用である．エルミート演算子 $\mathcal{H}$ を（E_0 を定数として），

$$-\frac{1}{\beta}(\mathcal{H} - E_0) = \mathrm{e}^{\beta W/2}\mathcal{L}\mathrm{e}^{-\beta W/2} \tag{8.4.4}$$

のように定義すると，

$$\mathcal{H} = -\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^2}{\partial\theta_j^2} + \frac{\beta(\beta/2-1)}{4}\sum_{j<l}^{N}\frac{1}{\sin^2[(\theta_j - \theta_l)/2]} \tag{8.4.5}$$

のように書くことができる．これは，単位円周上の Calogero-Sutherland 系ハミルトニアンとして知られている [130]．ガウス型のときよりも単純なので，Calogero-Sutherland 系の議論に少し立ち入ってみよう．このハミルトニアンに対しては，固有関数の完全系が，

$$\psi_\kappa(\theta_1, \cdots, \theta_N) = \mathrm{e}^{-\beta W/2}P_\kappa^{(2/\beta)}(z_1, \cdots, z_N), \quad z_j = \mathrm{e}^{i\theta_j}, \\ j = 1, 2, \cdots, N \tag{8.4.6}$$

の形に与えられることが知られている．ここで，$P_\kappa^{(2/\beta)}(z_1, \cdots, z_N)$ は，Jack 多項式と呼ばれる対称多項式である [43, 45, 47, 57]．パラメータ $\kappa = \{\kappa_1, \cdots, \kappa_N\}$ は，非負の整数 $\kappa_1 \geq \kappa_2 \geq \cdots \geq \kappa_N$ の集合であり，分割数 (partition) と呼ばれる．固有値は，κ によって定まるので，それを E_κ と書くことにする．

虚数時間シュレーディンガー方程式

$$-\beta\frac{\partial\psi}{\partial\tau} = \mathcal{H}\psi \tag{8.4.7}$$

のグリーン関数解は,

$$G_S(\varphi_1,\cdots,\varphi_N;\theta_1,\cdots,\theta_N;\tau)$$
$$=\sum_{\kappa}\frac{\psi_\kappa^*(\varphi_1,\cdots,\varphi_N)\psi_\kappa(\theta_1,\cdots,\theta_N)}{\langle\psi_\kappa|\psi_\kappa\rangle}\mathrm{e}^{-E_\kappa\tau/\beta} \tag{8.4.8}$$

のように書かれる. ここで, ψ_κ^* は ψ_κ の複素共役であり, また,

$$\langle\psi_\kappa|\psi_\kappa\rangle=\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\theta_1\cdots\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\theta_N|\psi_\kappa(\theta_1,\cdots,\theta_N)|^2 \tag{8.4.9}$$

のように定義されている. そこで, 元の Fokker-Planck 方程式に戻ると, そのグリーン関数解は,

$$G(\varphi_1,\cdots,\varphi_N;\theta_1,\cdots,\theta_N;\tau)$$
$$=\mathrm{e}^{\tau E_0/\beta}\frac{\mathrm{e}^{-\beta W(\theta_1,\cdots,\theta_N)/2}}{\mathrm{e}^{-\beta W(\varphi_1,\cdots,\varphi_N)/2}}G_S(\varphi_1,\cdots,\varphi_N;\theta_1,\cdots,\theta_N;\tau) \tag{8.4.10}$$

となることがわかる.

グリーン関数解 の Jack 多項式による表示を用いることにより, ブラウン運動の低次の動的相関関数を計算できることが知られている [43, 45, 47, 57]. また, 超行列の方法により, 動的相関を評価することもできる [55, 123].

本書では, 任意の多時刻多粒子相関関数を計算できる $\beta=2$ の場合に限定して議論を進める. この場合は Calogero-Sutherland 系の相互作用項が消えて簡単になる. ガウス型のときと同様に, G_S は 1 体グリーン関数の行列式の形に書くことができ,

$$G(\varphi_1,\cdots,\varphi_N;\theta_1,\cdots,\theta_N;\tau)$$
$$=\mathrm{e}^{\tau E_0/2}\prod_{j>l}^{N}\frac{\sin\dfrac{\theta_j-\theta_l}{2}}{\sin\dfrac{\varphi_j-\varphi_l}{2}}\det[g(\theta_j,\varphi_l;\tau)]_{j,l=1,2,\cdots,N} \tag{8.4.11}$$

が得られる．ここで，$z=\mathrm{e}^{i\theta}$，$w=\mathrm{e}^{i\varphi}$　として，

$$g(\theta,\varphi;\tau)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}\left(\dfrac{z}{w}\right)^{1/2}\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\dfrac{w}{z}\right)^{n}\mathrm{e}^{-\gamma_n\tau}, & N\text{ が偶数のとき，}\\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\dfrac{w}{z}\right)^{n}\mathrm{e}^{-\gamma_n\tau}, & N\text{ が奇数のとき}\end{cases} \tag{8.4.12}$$

および

$$\gamma_n=\begin{cases}(n-(1/2))^2/2, & N\text{ が偶数のとき，}\\ n^2/2, & N\text{ が奇数のとき}\end{cases} \tag{8.4.13}$$

である．

固有パラメータの $\tau=0$ における初期分布としては，ガウス型のときと同様に，

$$p_0(\varphi_1,\cdots,\varphi_N) \propto \begin{cases}\displaystyle\prod_{j=1}^{N}U(\varphi_j)\prod_{j<l}^{N}\mid\mathrm{e}^{i\varphi_j}-\mathrm{e}^{i\varphi_l}\mid,\\ \\ \displaystyle\sum_{P}\prod_{j=1}^{N/2}U(\varphi_j)^2\delta(\varphi_j-\varphi_{j+N/2})\prod_{j<l}^{N/2}\mid\mathrm{e}^{i\varphi_j}-\mathrm{e}^{i\varphi_l}\mid^4\end{cases} \tag{8.4.14}$$

の 2 通りの場合を扱うことにしよう．これらの初期条件は，それぞれ対称ユニタリおよび自己双対四元数ユニタリ行列の固有パラメータ分布に対応する．N が偶数のときにだけ定義される 2 番目の初期条件では，φ_j の置換についての和 $\sum_P$ をとることにより，初期分布を対称化している．また，ガウス型のときとの議論の類似性を明確にするために，重み関数 $U(\varphi)$ を導入して，より一般的な問題を考えることにする．円アンサンブルの場合は，$U(\varphi)=1$ である．$U(\varphi)$ は，必ずしも実数でなくてよい．

全固有パラメータ分布関数 p は，初期条件とグリーン関数を使って，

$$
\begin{aligned}
&p(\theta_1^1,\cdots,\theta_N^1;\theta_1^2,\cdots,\theta_N^2;\cdots;\theta_1^M,\cdots,\theta_N^M)\\
&=\frac{1}{N!}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\theta_1^0\cdots\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\theta_N^0 p_0(\theta_1^0,\cdots,\theta_N^0)\\
&\times\prod_{l=1}^{M}G(\theta_1^{l-1},\cdots,\theta_N^{l-1};\theta_1^l,\cdots,\theta_N^l;\tau_l-\tau_{l-1}),\quad \tau_0=0
\end{aligned}
\tag{8.4.15}
$$

のように表される．N が偶数のときには，初期状態についての積分を実行すると，

$$
\begin{aligned}
&p(\theta_1^1,\cdots,\theta_N^1;\theta_1^2,\cdots,\theta_N^2;\cdots;\theta_1^M,\cdots,\theta_N^M)\\
&\propto i^{-N(N-1)/2}\prod_{j=1}^{N}\mathrm{e}^{-i(N-1)\theta_j^M/2}\prod_{j>l}^{N}(\mathrm{e}^{i\theta_j^M}-\mathrm{e}^{i\theta_l^M})\\
&\times\mathrm{Pf}[F_{jl}^{11}]_{j,l=1,2,\cdots,N}\prod_{k=1}^{M-1}\det[g_{jl}^{k+1\ k}]_{j,l=1,2,\cdots,N}
\end{aligned}
\tag{8.4.16}
$$

を得る．行列 g^{mn} と F^{mn} は，

$$
g_{jl}^{mn}=g(\theta_j^m,\theta_l^n;\tau_m-\tau_n) \tag{8.4.17}
$$

および

$$
F_{jl}^{mn}=F(\theta_j^m,\theta_l^n;\tau_m,\tau_n) \tag{8.4.18}
$$

によって定義される．ここで，対称ユニタリおよび自己双対四元数ユニタリ行列の初期条件のそれぞれに対して，

$$
\begin{aligned}
&F(\theta,\theta';\tau,\tau')\\
&=\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\varphi'\int_{-\pi}^{\varphi'}\mathrm{d}\varphi U(\varphi)U(\varphi')\left[g(\theta,\varphi;\tau)g(\theta',\varphi';\tau')\right.\\
&\left.-\ g(\theta',\varphi;\tau')g(\theta,\varphi';\tau)\right],
\end{aligned}
$$

$$F(\theta,\theta';\tau,\tau')$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi U(\varphi)^2 \left[g(\theta,\varphi;\tau) \frac{\partial}{\partial\varphi} g(\theta',\varphi;\tau') - g(\theta',\varphi;\tau') \frac{\partial}{\partial\varphi} g(\theta,\varphi;\tau) \right] \tag{8.4.19}$$

である．N が奇数のときには，同様にして，

$$p(\theta_1^1,\cdots,\theta_N^1;\theta_1^2,\cdots,\theta_N^2;\cdots;\theta_1^M,\cdots,\theta_N^M)$$
$$\propto i^{-N(N-1)/2} \prod_{j=1}^{N} \mathrm{e}^{-i(N-1)\theta_j^M/2} \prod_{j>l}^{N} (\mathrm{e}^{i\theta_j^M} - \mathrm{e}^{i\theta_l^M})$$
$$\times \mathrm{Pf} \begin{bmatrix} [F_{jl}^{11}]_{j,l=1,2,\cdots,N} & [f_j^1]_{j=1,\cdots,N} \\ -[f_l^1]_{l=1,\cdots,N} & 0 \end{bmatrix} \prod_{k=1}^{M-1} \det[g_{jl}^{k+1\ k}]_{j,l=1,2,\cdots,N} \tag{8.4.20}$$

が得られる．N が奇数になるのは対称ユニタリ行列の初期条件のときだけであることに注意せよ．ここで，

$$f_j^m = f(\theta_j^m;\tau_m) \tag{8.4.21}$$

である．ただし，$f(\theta;\tau)$ は，

$$f(\theta;\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} U(\varphi) g(\theta,\varphi;\tau) \mathrm{d}\varphi \tag{8.4.22}$$

のように定義される．

第 9 章　固有値の相関関数(円アンサンブル)

円アンサンブルの固有値の動的相関関数も，ガウス型アンサンブルと同様に，四元数行列式の構造をもつ．この章では，初期条件に重み関数 $U(\theta)$ を含むより一般的な場合について，動的相関関数の議論を行う [97]．ガウス型アンサンブルの場合との類似性に注目してもらいたい．

9.1　動的相関関数

円アンサンブルに対するブラウン運動モデルにおいて，全固有パラメータ分布関数は，N が偶数のときには，

$$
\begin{aligned}
&p(\theta_1^1,\cdots,\theta_N^1;\theta_1^2,\cdots,\theta_N^2;\cdots;\theta_1^M,\cdots,\theta_N^M)\\
&= c\, i^{-N(N-1)/2}\prod_{j=1}^{N}\mathrm{e}^{-i(N-1)\theta_j^M/2}\prod_{j>l}^{N}(\mathrm{e}^{i\theta_j^M}-\mathrm{e}^{i\theta_l^M})\\
&\times \mathrm{Pf}[F_{jl}^{11}]_{j,l=1,2,\cdots,N}\prod_{m=1}^{M-1}\det[g_{jl}^{m+1\ m}]_{j,l=1,2,\cdots,N},
\end{aligned}
\tag{9.1.1}
$$

N が奇数のときには，

$$
\begin{aligned}
&p(\theta_1^1,\cdots,\theta_N^1;\theta_1^2,\cdots,\theta_N^2;\cdots;\theta_1^M,\cdots,\theta_N^M)\\
&= c\, i^{-N(N-1)/2}\prod_{j=1}^{N} \mathrm{e}^{-i(N-1)\theta_j^M/2}\prod_{j>l}^{N}(\mathrm{e}^{i\theta_j^M}-\mathrm{e}^{i\theta_l^M})\\
&\times \mathrm{Pf}\begin{bmatrix} [F_{jl}^{11}]_{j,l=1,2,\cdots,N} & [f_j^1]_{j=1,\cdots,N} \\ -[f_l^1]_{l=1,\cdots,N} & 0 \end{bmatrix} \prod_{m=1}^{M-1}\det[g_{jl}^{m+1\ m}]_{j,l=1,2,\cdots,N}
\end{aligned}
\tag{9.1.2}
$$

の形になることを前章で示した．ただし，

$$
g_{jl}^{mn} = g(\theta_j^m,\theta_l^n;\tau_m-\tau_n),\quad F_{jl}^{mn} = F(\theta_j^m,\theta_l^n;\tau_m,\tau_n) \tag{9.1.3}
$$

および，

$$
f_j^m = f(\theta_j^m;\tau_m) \tag{9.1.4}
$$

である（関数 $g(\theta,\varphi;\tau)$, $F(\theta,\varphi;\tau,\tau')$ および $f(\theta;\tau)$ は，それぞれ前章の (8.4.12), (8.4.19) および (8.4.22) において定義されている）．次に定義する動的相関関数は，定数 c に依存しない．そこで，今後は $c=1$ とおく．

動的相関関数は，ガウス型アンサンブルのときと同様に，

$$
\begin{aligned}
&\rho(\theta_1^1,\cdots,\theta_{m_1}^1;\theta_1^2,\cdots,\theta_{m_2}^2;\cdots;\theta_1^M,\cdots,\theta_{m_M}^M)\\
&=\frac{1}{c_N}\frac{(N!)^M}{\prod_{l=1}^{M}(N-m_l)!}\\
&\times\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\theta_{m_1+1}^1\cdots\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\theta_N^1\cdots\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\theta_{m_M+1}^M\cdots\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\theta_N^M\\
&\times p(\theta_1^1,\cdots,\theta_N^1;\theta_1^2,\cdots,\theta_N^2;\cdots;\theta_1^M,\cdots,\theta_N^M)
\end{aligned}
\tag{9.1.5}
$$

のように定義される．ここで，規格化定数 c_N は，

$$
\begin{aligned}
c_N = &\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\theta_1^1\cdots\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\theta_N^1\cdots\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\theta_1^M\cdots\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\theta_N^M\\
&\times p(\theta_1^1,\cdots,\theta_N^1;\theta_1^2,\cdots,\theta_N^2;\cdots;\theta_1^M,\cdots,\theta_N^M)
\end{aligned}
\tag{9.1.6}
$$

である．

N が偶数の場合

以下，z^* は z の複素共役とする．$z = \mathrm{e}^{i\theta}$, $w = \mathrm{e}^{i\varphi}$ とおいて，

$$
\begin{aligned}
\Psi_n(\theta;\tau) &= \sqrt{z}R_n(\theta;\tau), \\
\Psi_n^\sharp(\theta;\tau) &= \sqrt{z^*}R_n^\sharp(\theta;\tau), \\
\Phi_n(\theta;\tau) &= \int_{-\pi}^{\pi} F(\varphi,\theta;\tau,\tau)\sqrt{w}R_n(\varphi;\tau)\mathrm{d}\varphi, \\
\Phi_n^\sharp(\theta;\tau) &= \int_{-\pi}^{\pi} F(\varphi,\theta;\tau,\tau)\sqrt{w^*}R_n^\sharp(\varphi;\tau)\mathrm{d}\varphi
\end{aligned}
\tag{9.1.7}
$$

を定義する．ここで，多項式 $R_n(\theta;\tau) = z^n + c_{n\ n-1}z^{n-1} + \cdots + c_{n\ -n}z^{-n}$ および $R_n^\sharp(\theta;\tau) = z^{-n} + c_{n\ n-1}^\sharp z^{-n+1} + \cdots + c_{n\ -n}^\sharp z^n$ の係数 c_{jl} は，任意の複素数とする．ただし，$R_0(\theta;\tau) = R_0^\sharp(\theta;\tau) = 1$ である．

次に，行列 D^{mn}, I^{mn} および S^{mn} を，

$$
\begin{aligned}
D_{jl}^{mn} &= D(\theta_j^m,\theta_l^n;\tau_m,\tau_n), \\
I_{jl}^{mn} &= I(\theta_j^m,\theta_l^n;\tau_m,\tau_n), \\
S_{jl}^{mn} &= S(\theta_j^m,\theta_l^n;\tau_m,\tau_n)
\end{aligned}
\tag{9.1.8}
$$

によって導入する．ただし，

$$
\begin{aligned}
D(\theta,\theta';\tau,\tau') = \sum_{k=0}^{(N/2)-1} \frac{1}{r_k(\tau')} \Big[&\mathrm{e}^{-\gamma_{-k}(\tau'-\tau)}\Psi_k^\sharp(\theta;\tau)\Psi_k(\theta';\tau') \\
&- \mathrm{e}^{-\gamma_{k+1}(\tau'-\tau)}\Psi_k(\theta;\tau)\Psi_k^\sharp(\theta';\tau')\Big],
\end{aligned}
\tag{9.1.9}
$$

$$
\begin{aligned}
I(\theta,\theta';\tau,\tau') = -\sum_{k=0}^{(N/2)-1} \frac{1}{r_k(\tau')} \Big[&\mathrm{e}^{-\gamma_{-k}(\tau'-\tau)}\Phi_k^\sharp(\theta;\tau)\Phi_k(\theta';\tau') \\
&- \mathrm{e}^{-\gamma_{k+1}(\tau'-\tau)}\Phi_k(\theta;\tau)\Phi_k^\sharp(\theta';\tau')\Big] \\
&+ F(\theta,\theta';\tau,\tau')
\end{aligned}
\tag{9.1.10}
$$

および,

$$S(\theta,\theta';\tau,\tau') = \sum_{k=0}^{(N/2)-1} \frac{1}{r_k(\tau')} \Big[\mathrm{e}^{-\gamma_{-k}(\tau'-\tau)} \Phi_k^\sharp(\theta;\tau)\Psi_k(\theta';\tau') - \mathrm{e}^{-\gamma_{k+1}(\tau'-\tau)} \Phi_k(\theta;\tau)\Psi_k^\sharp(\theta';\tau') \Big] \tag{9.1.11}$$

である. さらに,

$$\tilde{S}_{jl}^{mn} = \begin{cases} S_{jl}^{mn} - g_{jl}^{mn}, & m > n, \\ S_{jl}^{mn}, & m \leq n \end{cases} \tag{9.1.12}$$

を定義する. ここで, 以下の定理が得られる.

定理 *9.1* 偶数 N に対する全固有パラメータ分布関数 p は,

$$p(\theta_1^1,\cdots,\theta_N^2;\theta_1^2,\cdots,\theta_N^2;\cdots;\theta_1^M,\cdots,\theta_N^M) = i^{-N(N-1)/2} \prod_{j=0}^{(N/2)-1} r_j(\tau_M)\mathrm{Tdet}[B^{\mu\nu}]_{\mu,\nu=1,2,\cdots,M} \tag{9.1.13}$$

のように四元数行列式の形に書ける. 各ブロック $B^{\mu\nu}$ は $N\times N$ 四元数行列であり, その要素は,

$$B_{jl}^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \tilde{S}_{jl}^{\mu\nu} & I_{jl}^{\mu\nu} \\ D_{jl}^{\mu\nu} & \tilde{S}_{lj}^{\nu\mu} \end{bmatrix} \tag{9.1.14}$$

のように表現される.

定理 *9.1* は, ガウス型アンサンブルの場合の **定理** *6.1* の証明と同様の議論により, 証明できる.

Schmidt の直交化の方法により, $R_n(\theta;\tau)$ と $R_n^\sharp(\theta;\tau)$ を, 以下の歪直交関係を満たす単位円周上の歪直交多項式にとることができる.

$$\begin{aligned} \langle \sqrt{z^*}R_m^\sharp(\theta;\tau), \sqrt{w}R_n(\varphi;\tau)\rangle &= -\langle \sqrt{z}R_n(\theta;\tau), \sqrt{w^*}R_m^\sharp(\varphi;\tau)\rangle \\ &= r_m(\tau)\delta_{mn}, \\ \langle \sqrt{z^*}R_m^\sharp(\theta;\tau), \sqrt{w^*}R_n^\sharp(\varphi;\tau)\rangle = 0, &\quad \langle \sqrt{z}R_m(\theta;\tau), \sqrt{w}R_n(\varphi;\tau)\rangle = 0. \end{aligned} \tag{9.1.15}$$

ここで，反対称内積は，

$$\langle f(\theta), g(\varphi)\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\varphi F(\theta, \varphi; \tau, \tau) f(\theta) g(\varphi) \tag{9.1.16}$$

のように定義される．

歪直交多項式 $R_n(\theta;\tau)$ および $R_n^\sharp(\theta;\tau)$ $(n \geq 1)$ に対しては，行列式表示

$$R_n(\theta;\tau) = \mathcal{D}_n^{-1} \times \begin{vmatrix} z^n & J^{n\ n-1} & \cdots & J^{n\ 0} & J^{n\ -1} & \cdots & J^{n\ -n} \\ z^{n-1} & J^{n-1\ n-1} & \cdots & J^{n-1\ 0} & J^{n-1\ -1} & \cdots & J^{n-1\ -n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z^0 & J^{0\ n-1} & \cdots & J^{0\ 0} & J^{0\ -1} & \cdots & J^{0\ -n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z^{-n} & J^{-n\ n-1} & \cdots & J^{-n\ 0} & J^{-n\ -1} & \cdots & J^{-n\ -n} \end{vmatrix} \tag{9.1.17}$$

および，

$$R_n^\sharp(\theta;\tau) = \mathcal{D}_n^{-1} \times \begin{vmatrix} z^{-n} & J^{-n-1\ -n} & \cdots & J^{-n-1\ 0} & J^{-n-1\ 1} & \cdots & J^{-n-1\ n-1} \\ z^{-n+1} & J^{-n\ -n} & \cdots & J^{-n\ 0} & J^{-n\ 1} & \cdots & J^{-n\ n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z^0 & J^{-1\ -n} & \cdots & J^{-1\ 0} & J^{-1\ 1} & \cdots & J^{-1\ n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z^{n} & J^{n-1\ -n} & \cdots & J^{n-1\ 0} & J^{n-1\ 1} & \cdots & J^{n-1\ n-1} \end{vmatrix} \tag{9.1.18}$$

が存在する．ここで，

$$J^{mn} = \langle z^{m+(1/2)}, w^{n+(1/2)}\rangle \tag{9.1.19}$$

および,

$$
\mathcal{D}_n = \begin{vmatrix} J^{n-1\ n-1} & \cdots & J^{n-1\ 0} & J^{n-1\ -1} & \cdots & J^{n-1\ -n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J^{0\ n-1} & \cdots & J^{0\ 0} & J^{0\ -1} & \cdots & J^{0\ -n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ J^{-n\ n-1} & \cdots & J^{-n\ 0} & J^{-n\ -1} & \cdots & J^{-n\ -n} \end{vmatrix} \tag{9.1.20}
$$

である.

<u>N が奇数の場合</u>

次に, N が奇数の場合を考える. まず,

$$
\begin{aligned}
\Phi_n(\theta;\tau) &= \int_{-\pi}^{\pi} F(\varphi,\theta;\tau,\tau) R_n(\varphi;\tau)\mathrm{d}\varphi, \\
\Phi_n^{\sharp}(\theta;\tau) &= \int_{-\pi}^{\pi} F(\varphi,\theta;\tau,\tau) R_n^{\sharp}(\varphi;\tau)\mathrm{d}\varphi
\end{aligned} \tag{9.1.21}
$$

を定義する. ここで, $R_n(\theta;\tau)$ と $R_n^{\sharp}(\theta;\tau)$ は,

$$
\prod_{j>l}^{N}(\mathrm{e}^{i\theta_j} - \mathrm{e}^{i\theta_l}) = \prod_{j=1}^{N} \mathrm{e}^{i(N-1)\theta_j/2}
$$
$$
\times \begin{vmatrix} R^{\sharp}_{(N-1)/2}(\theta_1;\tau) & R^{\sharp}_{(N-1)/2}(\theta_2;\tau) & \cdots & R^{\sharp}_{(N-1)/2}(\theta_N;\tau) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_1^{\sharp}(\theta_1;\tau) & R_1^{\sharp}(\theta_2;\tau) & \cdots & R_1^{\sharp}(\theta_N;\tau) \\ R_0(\theta_1;\tau) & R_0(\theta_2;\tau) & \cdots & R_0(\theta_N;\tau) \\ R_1(\theta_1;\tau) & R_1(\theta_2;\tau) & \cdots & R_1(\theta_N;\tau) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{(N-1)/2}(\theta_1;\tau) & R_{(N-1)/2}(\theta_2;\tau) & \cdots & R_{(N-1)/2}(\theta_N;\tau) \end{vmatrix} \tag{9.1.22}
$$

を満足する任意関数である．このとき，行列 D^{mn}, I^{mn} および S^{mn} を，

$$
\begin{aligned}
D_{jl}^{mn} &= D(\theta_j^m, \theta_l^n; \tau_m, \tau_n), \\
I_{jl}^{mn} &= I(\theta_j^m, \theta_l^n; \tau_m, \tau_n), \\
S_{jl}^{mn} &= S(\theta_j^m, \theta_l^n; \tau_m, \tau_n)
\end{aligned}
\tag{9.1.23}
$$

のように導入する．ここで，

$$
\begin{aligned}
D(\theta, \theta'; \tau, \tau') = \sum_{k=1}^{(N-1)/2} \frac{1}{r_k(\tau')} \Big[&\mathrm{e}^{-\gamma_{-k}(\tau'-\tau)} R_k^\sharp(\theta;\tau) R_k(\theta';\tau') \\
&- \mathrm{e}^{-\gamma_k(\tau'-\tau)} R_k(\theta;\tau) R_k^\sharp(\theta';\tau') \Big],
\end{aligned}
\tag{9.1.24}
$$

$$
\begin{aligned}
I(\theta, \theta'; \tau, \tau') = - \sum_{k=1}^{(N-1)/2} \frac{1}{r_k(\tau')} \Big[&\mathrm{e}^{-\gamma_{-k}(\tau'-\tau)} \Phi_k^\sharp(\theta;\tau) \Phi_k(\theta';\tau') \\
&- \mathrm{e}^{-\gamma_k(\tau'-\tau)} \Phi_k(\theta;\tau) \Phi_k^\sharp(\theta';\tau') \Big] \\
&+ \frac{1}{s_0(\tau)} \Phi_0(\theta;\tau) f(\theta';\tau') - \frac{1}{s_0(\tau')} \Phi_0(\theta';\tau') f(\theta;\tau) \\
&+ F(\theta, \theta'; \tau, \tau')
\end{aligned}
\tag{9.1.25}
$$

および

$$
\begin{aligned}
S(\theta, \theta'; \tau, \tau') = \sum_{k=1}^{(N-1)/2} \frac{1}{r_k(\tau')} \Big[&\mathrm{e}^{-\gamma_{-k}(\tau'-\tau)} \Phi_k^\sharp(\theta;\tau) R_k(\theta';\tau') \\
&- \mathrm{e}^{-\gamma_k(\tau'-\tau)} \Phi_k(\theta;\tau) R_k^\sharp(\theta';\tau') \Big] \\
&+ \frac{1}{s_0(\tau')} R_0(\theta', \tau') f(\theta;\tau)
\end{aligned}
\tag{9.1.26}
$$

である．さらに，

$$
\tilde{S}_{jl}^{mn} = \begin{cases} S_{jl}^{mn} - g_{jl}^{mn}, & m > n, \\ S_{jl}^{mn}, & m \le n \end{cases}
\tag{9.1.27}
$$

を定義すると，以下の定理が得られる．

定理 *9.2*　N が奇数のとき，全固有パラメータ分布関数は，四元数行列式表示

$$
\begin{aligned}
&p(\theta_1^1, \cdots, \theta_N^2; \theta_1^2, \cdots, \theta_N^2; \cdots; \theta_1^M, \cdots, \theta_N^M) \\
&= i^{-N(N-1)/2} s_0(\tau_M) \prod_{j=1}^{(N-1)/2} r_j(\tau_M) \mathrm{Tdet}[B^{\mu\nu}]_{\mu,\nu=1,2,\cdots,M}
\end{aligned} \tag{9.1.28}
$$

をもつ．各ブロック $B^{\mu\nu}$ は，$N \times N$ 四元数行列で，その要素は，

$$
B_{jl}^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \tilde{S}_{jl}^{\mu\nu} & I_{jl}^{\mu\nu} \\ D_{jl}^{\mu\nu} & \tilde{S}_{lj}^{\nu\mu} \end{bmatrix} \tag{9.1.29}
$$

のように表現される．

定理 *9.2* は，**定理** *6.2* と同様に証明できる．

ここで，多項式 $\Omega_n(\theta;\tau)$, $\Omega_n^\sharp(\theta;\tau)$ （$n \geq 1$ とする）および $\Omega_0(\theta;\tau) = \Omega_0^\sharp(\theta;\tau)$ を，$m, n \geq 1$ に対して歪直交関係

$$
\begin{aligned}
&\langle \Omega_m^\sharp(\theta;\tau), \Omega_n(\varphi;\tau) \rangle = -\langle \Omega_n(\theta;\tau), \Omega_m^\sharp(\varphi;\tau) \rangle = r_m(\tau)\delta_{mn}, \\
&\langle \Omega_m^\sharp(\theta;\tau), \Omega_n^\sharp(\varphi;\tau) \rangle = 0, \quad \langle \Omega_m(\theta;\tau), \Omega_n(\varphi;\tau) \rangle = 0
\end{aligned} \tag{9.1.30}
$$

を満たし，さらに，$0 \leq n \leq (N-1)/2$ に対して

$$
\begin{aligned}
&\langle \Omega_n^\sharp(\theta;\tau), \Omega_0(\varphi;\tau) \rangle = -\langle \Omega_0(\theta;\tau), \Omega_n^\sharp(\varphi;\tau) \rangle = 0, \\
&\langle \Omega_0^\sharp(\theta;\tau), \Omega_n(\varphi;\tau) \rangle = -\langle \Omega_n(\theta;\tau), \Omega_0^\sharp(\varphi;\tau) \rangle = 0
\end{aligned} \tag{9.1.31}
$$

を満たすように導入する（(9.2.16), (9.2.17) 参照）．反対称内積は，(9.1.16) で定義されている．

このとき，$n \geq 0$ に対して，$s_n(\tau)$, $s_n^\sharp(\tau)$ を，

$$
\begin{aligned}
s_n(\tau) &= \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta f(\theta;\tau)\Omega_n(\theta;\tau), \\
s_n^\sharp(\tau) &= \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta f(\theta;\tau)\Omega_n^\sharp(\theta;\tau)
\end{aligned} \tag{9.1.32}
$$

のように定める．次に，$R_n(\theta;\tau)$ と $R_n^\sharp(\theta;\tau)$ を， $n=1,2,\cdots,(N-1)/2$ に対して，

$$
\begin{aligned}
R_n(\theta;\tau) &= \Omega_n(\theta;\tau) - \frac{s_n(\tau)}{s_0(\tau)}\Omega_0(\theta;\tau),\\
R_n^\sharp(\theta;\tau) &= \Omega_n^\sharp(\theta;\tau) - \frac{s_n^\sharp(\tau)}{s_0(\tau)}\Omega_0(\theta;\tau)
\end{aligned}
\tag{9.1.33}
$$

のようにとり，さらに，

$$
R_0(\theta;\tau) = R_0^\sharp(\theta;\tau) = \Omega_0(\theta;\tau) \tag{9.1.34}
$$

として，(9.1.22) が満足されるようにできる．

四元数行列式表示

歪直交関係を使うことにより，N の偶奇によらず，

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\pi}^{\pi} B_{ji}^{mp} B_{il}^{pn} \mathrm{d}\theta_i^p\\
&= \begin{cases}
0, & m<p,\ p>n,\\
B_{jl}^{mn}\xi, & m<p,\ p=n,\\
\eta B_{jl}^{mn}, & m=p,\ p>n,\\
\eta B_{jl}^{mn} + B_{jl}^{mn}\xi, & m=p,\ p=n,\\
\eta B_{jl}^{mn} + B_{jl}^{mn}\xi - \xi B_{jl}^{mn} - B_{jl}^{mn}\eta, & m>p,\ p<n,\\
\eta B_{jl}^{mn} + B_{jl}^{mn}\xi - \xi B_{jl}^{mn}, & m>p,\ p=n,\\
\eta B_{jl}^{mn} + B_{jl}^{mn}\xi - B_{jl}^{mn}\eta, & m=p,\ p<n,\\
\eta B_{jl}^{mn} - \xi B_{jl}^{mn}, & m>p,\ p>n,\\
B_{jl}^{mn}\xi - B_{jl}^{mn}\eta, & m<p,\ p<n
\end{cases}
\end{aligned}
\tag{9.1.35}
$$

および

$$
\int_{-\pi}^{\pi} B_{jj}^{mm} \mathrm{d}\theta_j^m = N \tag{9.1.36}
$$

を示すことができる．ただし，四元数 ξ と η は，

$$\xi = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \eta = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{9.1.37}$$

のように 2×2 行列表示される．したがって，ガウス型アンサンブルのときと同様の議論により，動的相関関数の四元数行列式表示

$$\begin{aligned} &\rho(\theta_1^1, \cdots, \theta_{m_1}^1; \theta_1^2, \cdots, \theta_{m_2}^2; \cdots; \theta_1^M, \cdots, \theta_{m_M}^M) \\ &= \mathrm{Tdet}[B^{\mu\nu}(m_\mu, m_\nu)]_{\mu,\nu=1,2,\cdots,M} \end{aligned} \tag{9.1.38}$$

および規格化定数

$$c_N = \begin{cases} i^{-N(N-1)/2}(N!)^M \displaystyle\prod_{j=0}^{(N/2)-1} r_j(\tau_M), & N \text{ が偶数のとき}, \\ i^{-N(N-1)/2}(N!)^M s_0(\tau_M) \displaystyle\prod_{j=1}^{(N-1)/2} r_j(\tau_M), & N \text{ が奇数のとき} \end{cases} \tag{9.1.39}$$

を得る．ここで，各ブロック $B^{\mu\nu}(m_\mu, m_\nu)$ は，$m_\mu + 1, m_\mu + 2, \cdots, N$ 番目の行と $m_\nu + 1, m_\nu + 2, \cdots, N$ 番目の列を $B^{\mu\nu}$ から除くことによってつくられる．

9.2 長時間極限

円アンサンブルの場合にも，$\tau_j - \tau_l$, $j, l = 1, 2, \cdots, M$ を固定した条件の下で，$\tau_j \to \infty$, $j = 1, 2, \cdots, M$ の長時間極限を考えてみよう．動的相関関数は，この極限において，ユニタリ対称性内部でのブラウン運動を記述する．

<u>N が偶数の場合</u>

$\tau = 0$ における歪直交多項式を，$z = \mathrm{e}^{i\theta}$ として，

$$R_n(\theta;0) = \sum_{j=-n}^{n} \alpha_{nj} z^j, \quad \alpha_{nn} = 1,$$
$$R_n^\sharp(\theta;0) = \sum_{j=-n}^{n} \alpha_{nj}^\sharp z^{-j}, \quad \alpha_{nn}^\sharp = 1 \tag{9.2.1}$$

のように展開する．このとき，ガウス型アンサンブルのときと同様に，

$$R_n(\theta;\tau) = \mathrm{e}^{-\gamma_{n+1}\tau} \sum_{j=-n}^{n} \alpha_{nj} z^j \mathrm{e}^{\gamma_{j+1}\tau},$$
$$R_n^\sharp(\theta;\tau) = \mathrm{e}^{-\gamma_{-n}\tau} \sum_{j=-n}^{n} \alpha_{nj}^\sharp z^{-j} \mathrm{e}^{\gamma_{-j}\tau}, \tag{9.2.2}$$

$$r_n(\tau) = \mathrm{e}^{-\gamma_{-n}\tau} \mathrm{e}^{-\gamma_{n+1}\tau} r_n(0) \tag{9.2.3}$$

であることがわかる．証明は，等式

$$\begin{aligned} &\langle \sqrt{z^*} R_m^\sharp(\theta;\tau), \sqrt{w} R_n(\varphi;\tau) \rangle \\ &= \mathrm{e}^{-\gamma_{-m}\tau} \mathrm{e}^{-\gamma_{n+1}\tau} \left. \langle \sqrt{z^*} R_m^\sharp(\theta;0), \sqrt{w} R_n(\varphi;0) \rangle \right|_{\tau=0} \end{aligned} \tag{9.2.4}$$

から得られる．(9.2.2) の逆展開を，$n \geq 1$ に対して，

$$z^n \mathrm{e}^{\gamma_{n+1}\tau} = \sum_{j=0}^{n} \lambda_{nj} \mathrm{e}^{\gamma_{j+1}\tau} R_j(\theta;\tau) + \frac{1}{z} \sum_{j=0}^{n-1} \mu_{nj} \mathrm{e}^{\gamma_{-j}\tau} R_j^\sharp(\theta;\tau),$$
$$z^{-n} \mathrm{e}^{\gamma_{-n}\tau} = \sum_{j=0}^{n} \lambda_{nj}^\sharp \mathrm{e}^{\gamma_{-j}\tau} R_j^\sharp(\theta;\tau) + z \sum_{j=0}^{n-1} \mu_{nj}^\sharp \mathrm{e}^{\gamma_{j+1}\tau} R_j(\theta;\tau) \tag{9.2.5}$$

のように導入する．この逆展開を (8.4.12) を通じて (8.4.19) に代入し，そ

の結果を (9.1.7) に使うと，$n \geq 0$ に対して，

$$\Phi_n(\theta;\tau) = -\frac{e^{-\gamma_{n+1}\tau}}{2\pi} r_n(0) \times \left[\sum_{\nu \geq n+1}^{\infty} z^{-\nu-(1/2)} e^{-\gamma_{\nu+1}\tau} \mu_{\nu n} + \sum_{\nu \geq n}^{\infty} z^{\nu+(1/2)} e^{-\gamma_{-\nu}\tau} \lambda^{\sharp}_{\nu n} \right],$$

$$\Phi^{\sharp}_n(\theta;\tau) = \frac{e^{-\gamma_{-n}\tau}}{2\pi} r_n(0) \times \left[\sum_{\nu \geq n}^{\infty} z^{-\nu-(1/2)} e^{-\gamma_{\nu+1}\tau} \lambda_{\nu n} + \sum_{\nu \geq n+1}^{\infty} z^{\nu+(1/2)} e^{-\gamma_{-\nu}\tau} \mu^{\sharp}_{\nu n} \right] \tag{9.2.6}$$

を導くことができる．ただし，$\lambda_{00} = \lambda^{\sharp}_{00} = 1$ とする．また，(9.2.5) を，(8.4.12) を通じて (8.4.19) に代入し，その結果を (9.2.6) と比較することにより，

$$F(\theta,\theta';\tau,\tau') = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{r_k(\tau')} \left[e^{-\gamma_{-k}(\tau'-\tau)} \Phi^{\sharp}_k(\theta;\tau) \Phi_k(\theta';\tau') - e^{-\gamma_{k+1}(\tau'-\tau)} \Phi_k(\theta;\tau) \Phi^{\sharp}_k(\theta';\tau') \right] \tag{9.2.7}$$

が得られ，したがって，

$$I(\theta,\theta';\tau,\tau') = \sum_{k=N/2}^{\infty} \frac{1}{r_k(\tau')} \left[e^{-\gamma_{-k}(\tau'-\tau)} \Phi^{\sharp}_k(\theta;\tau) \Phi_k(\theta';\tau') - e^{-\gamma_{k+1}(\tau'-\tau)} \Phi_k(\theta;\tau) \Phi^{\sharp}_k(\theta';\tau') \right] \tag{9.2.8}$$

である．一方，(9.2.6) を (9.1.11) に代入すると，

$$S(\theta,\theta';\tau,\tau') = S_1(\theta,\theta';\tau,\tau') + S_2(\theta,\theta';\tau,\tau') \tag{9.2.9}$$

の形を得る．ただし，$z = e^{i\theta}$，$z' = e^{i\theta'}$ に対して，

$$S_1(\theta,\theta';\tau,\tau') = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{z}{z'}\right)^{1/2} \sum_{n=-(N/2)+1}^{N/2} \left(\frac{z'}{z}\right)^{n} e^{-\gamma_n(\tau-\tau')} \tag{9.2.10}$$

および，

$$S_2(\theta,\theta';\tau,\tau') = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{(N/2)-1}\sum_{\nu=N/2}^{\infty}$$

$$\times\left[\left(z^{-\nu-(1/2)}\mathrm{e}^{-\gamma_{\nu+1}\tau}\lambda_{\nu k} + z^{\nu+(1/2)}\mathrm{e}^{-\gamma_{-\nu}\tau}\mu^{\sharp}_{\nu k}\right)\mathrm{e}^{\gamma_{k+1}\tau'}\sqrt{z'}R_k(\theta';\tau')\right.$$

$$\left. + \left(z^{-\nu-(1/2)}\mathrm{e}^{-\gamma_{\nu+1}\tau}\mu_{\nu k} + z^{\nu+(1/2)}\mathrm{e}^{-\gamma_{-\nu}\tau}\lambda^{\sharp}_{\nu k}\right)\mathrm{e}^{\gamma_{-k}\tau'}\sqrt{(z')^*}R^{\sharp}_k(\theta';\tau')\right] \tag{9.2.11}$$

である．

(8.4.13) より，$\gamma_n = \gamma_{-n+1}$ および $\gamma_{n+1} > \gamma_n$ が，$n \geq 1$ に対して満たされていることがわかる．この条件の下で，長時間極限 $\tau_j \to \infty$, $j = 1, 2, \cdots, M$ をとると，(9.2.9) より，

$$S(\theta,\theta';\tau,\tau') \sim S_1(\theta,\theta';\tau,\tau') + O(\mathrm{e}^{-(\gamma_{(N/2)+1}-\gamma_{N/2})\tau}) \tag{9.2.12}$$

となる．さらに，漸近関係 $R_n(\theta;\tau) \sim O(1)$, $R^{\sharp}_n(\theta;\tau) \sim O(1)$, $\Phi_n(\theta;\tau) \sim O(\mathrm{e}^{-2\gamma_{n+1}\tau})$ および $\Phi^{\sharp}_n(\theta;\tau) \sim O(\mathrm{e}^{-2\gamma_{n+1}\tau})$ を導くことができるので，

$$I(\theta,\theta';\tau,\tau') \sim O(\mathrm{e}^{-\gamma_{(N/2)+1}(\tau+\tau')}), \quad D(\theta,\theta';\tau,\tau') \sim O(\mathrm{e}^{\gamma_{N/2}(\tau+\tau')}) \tag{9.2.13}$$

を得る．したがって，長時間極限において，四元数行列式表示の中の $\tilde{S}^{mn}_{jl}$ は，

$$\sigma^{mn}_{jl} = \begin{cases} S_1(\theta^m_j,\theta^n_l;\tau_m,\tau_n) - g^{mn}_{jl}, & m > n, \\ S_1(\theta^m_j,\theta^n_l;\tau_m,\tau_n), & m \leq n \end{cases} \tag{9.2.14}$$

によって置き換えられ，D^{mn}_{jl} と $\tilde{I}^{mn}_{jl}$ はゼロにとってよい．そこで，ガウス型アンサンブルのときと同様に，動的相関関数には，普通の行列式の表示

$$\rho(\theta^1_1,\cdots,\theta^1_{m_1};\theta^2_1,\cdots,\theta^2_{m_2};\cdots;\theta^M_1,\cdots,\theta^M_{m_M})$$
$$= \det[\sigma^{\mu\nu}(m_\mu,m_\nu)]_{\mu,\nu=1,2,\cdots,M} \tag{9.2.15}$$

があることがわかる．ここで，各ブロック $\sigma^{\mu\nu}(m_\mu, m_\nu)$ は，$m_\mu+1, m_\mu+2, \cdots, N$ 番目の行と $m_\nu+1, m_\nu+2, \cdots, N$ 番目の列を $\sigma^{\mu\nu}$ から除くことによってつくられる．

N が奇数の場合

N が奇数の場合には，N が偶数の場合と同様の議論により，展開 ($n \geq 1$, $z = \mathrm{e}^{i\theta}$)

$$\Omega_n(\theta;\tau) = \mathrm{e}^{-\gamma_n\tau} \sum_{j=-n+1}^{n} \alpha_{nj} z^j \mathrm{e}^{\gamma_j\tau},$$

$$\Omega_n^\sharp(\theta;\tau) = \mathrm{e}^{-\gamma_{-n}\tau} \sum_{j=-n+1}^{n} \alpha_{nj}^\sharp z^{-j} \mathrm{e}^{\gamma_{-j}\tau} \tag{9.2.16}$$

を導入すると有用である．ここで，$\alpha_{nn} = \alpha_{nn}^\sharp = 1$ である．また，

$$\Omega_0(\theta;\tau) = \mathrm{e}^{-\gamma_0\tau} \sum_{j=-(N-1)/2}^{(N-1)/2} \alpha_{0j} z^j \mathrm{e}^{\gamma_j\tau} \tag{9.2.17}$$

とできる．ただし，$\alpha_{00} = 1$ である．これまでと同様，

$$r_n(\tau) = \mathrm{e}^{-\gamma_{-n}\tau} \mathrm{e}^{-\gamma_n\tau} r_n(0) \tag{9.2.18}$$

および

$$s_n(\tau) = \mathrm{e}^{-\gamma_n\tau} s_n(0), \quad s_n^\sharp(\tau) = \mathrm{e}^{-\gamma_{-n}\tau} s_n^\sharp(0) \tag{9.2.19}$$

が示される．展開 (9.2.16), (9.2.17) の逆展開は，$n \geq 1$ に対しては，

$$z^n \mathrm{e}^{\gamma_n\tau} = \sum_{j=0}^{n_\lambda} \lambda_{nj} \mathrm{e}^{\gamma_j\tau} \Omega_j(\theta;\tau) + \sum_{j=1}^{n_\mu} \mu_{nj} \mathrm{e}^{\gamma_{-j}\tau} \Omega_j^\sharp(\theta;\tau),$$

$$z^{-n} \mathrm{e}^{\gamma_{-n}\tau} = \sum_{j=0}^{n_\lambda} \lambda_{nj}^\sharp \mathrm{e}^{\gamma_{-j}\tau} \Omega_j^\sharp(\theta;\tau) + \sum_{j=1}^{n_\mu} \mu_{nj}^\sharp \mathrm{e}^{\gamma_j\tau} \Omega_j(\theta;\tau) \tag{9.2.20}$$

であり，さらに，

$$z^0 e^{\gamma_0\tau} = \sum_{j=0}^{(N-1)/2} \lambda_{0j} e^{\gamma_j\tau}\Omega_j(\theta;\tau) + \sum_{j=1}^{(N-1)/2} \mu_{0j} e^{\gamma_{-j}\tau}\Omega_j^\sharp(\theta;\tau) \quad (9.2.21)$$

と書ける．ただし，

$$\begin{aligned} &n_\lambda = n_\mu + 1 = n, \quad n > (N-1)/2, \\ &n_\lambda = n_\mu = (N-1)/2, \quad n \le (N-1)/2 \end{aligned} \quad (9.2.22)$$

である．ここで，

$$\Pi_n(\theta;\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} F(\varphi,\theta;\tau,\tau)\Omega_n(\varphi;\tau)\mathrm{d}\varphi$$
$$- \begin{cases} 0, & 0 \le n \le (N-1)/2, \\ \dfrac{e^{-\gamma_n\tau}}{2\pi} \left\langle \Omega_n(\varphi;0), \Omega_0(\varphi';0)\right\rangle\big|_{\tau=0} \Upsilon(\theta;\tau), & n \ge (N+1)/2, \end{cases}$$

$$\Pi_n^\sharp(\theta;\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} F(\varphi,\theta;\tau,\tau)\Omega_n^\sharp(\varphi;\tau)\mathrm{d}\varphi$$
$$- \begin{cases} 0, & 0 \le n \le (N-1)/2, \\ \dfrac{e^{-\gamma_{-n}\tau}}{2\pi} \left\langle \Omega_n^\sharp(\varphi;0), \Omega_0(\varphi';0)\right\rangle\big|_{\tau=0} \Upsilon(\theta;\tau), & n \ge (N+1)/2 \end{cases} \quad (9.2.23)$$

を導入する．ただし，

$$\Upsilon(\theta;\tau) = \sum_{l=0}^{\infty} z^{-l} e^{-\gamma_l\tau}\lambda_{l0} + \sum_{l=1}^{\infty} z^l e^{-\gamma_{-l}\tau}\lambda_{l0}^\sharp \quad (9.2.24)$$

とする．逆展開 (9.2.20)，(9.2.21) を使うことにより，

$$\Pi_n(\theta;\tau) = -\mathrm{e}^{-\gamma_n\tau}\frac{r_n(0)}{2\pi}$$

$$\times\begin{cases} \left[\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\gamma_l\tau}}{z^l}\mu_{ln} + \sum_{l=1}^{\infty} z^l\mathrm{e}^{-\gamma_{-l}\tau}\lambda^\sharp_{ln}\right], & 1 \le n \le (N-1)/2, \\ \left[\sum_{l=n+1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\gamma_l\tau}}{z^l}\mu_{ln} + \sum_{l=n}^{\infty} z^l\mathrm{e}^{-\gamma_{-l}\tau}\lambda^\sharp_{ln}\right], & n \ge (N+1)/2, \end{cases}$$

$$\Pi^\sharp_n(\theta;\tau) = \mathrm{e}^{-\gamma_{-n}\tau}\frac{r_n(0)}{2\pi}$$

$$\times\begin{cases} \left[\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\gamma_l\tau}}{z^l}\lambda_{ln} + \sum_{l=1}^{\infty} z^l\mathrm{e}^{-\gamma_{-l}\tau}\mu^\sharp_{ln}\right], & 1 \le n \le (N-1)/2, \\ \left[\sum_{l=n}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\gamma_l\tau}}{z^l}\lambda_{ln} + \sum_{l=n+1}^{\infty} z^l\mathrm{e}^{-\gamma_{-l}\tau}\mu^\sharp_{ln}\right], & n \ge (N+1)/2 \end{cases}$$

(9.2.25)

がわかる．これにより，

$$f(\theta;\tau) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{r_n(\tau)}[\Pi^\sharp_n(\theta;\tau)s_n(\tau) - \Pi_n(\theta;\tau)s^\sharp_n(\tau)] + \frac{1}{2\pi}s_0(0)\Upsilon(\theta;\tau)$$

(9.2.26)

が導出できる．さらに，(9.2.25) と (9.2.26) を使って (9.1.26) を書き換えると，

$$S(\theta,\theta';\tau,\tau') = S_1(\theta,\theta';\tau,\tau') + S_2(\theta,\theta';\tau,\tau') \tag{9.2.27}$$

を得る．ここで，$z = \mathrm{e}^{i\theta}$，$z' = \mathrm{e}^{i\theta'}$ に対して，

$$S_1(\theta,\theta';\tau,\tau') = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-(N-1)/2}^{(N-1)/2}\left(\frac{z'}{z}\right)^n \mathrm{e}^{-\gamma_n(\tau-\tau')} \tag{9.2.28}$$

および

$$S_2(\theta,\theta';\tau,\tau') = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{(N-1)/2}\sum_{\nu=(N+1)/2}^{\infty}$$

$$\times\left[\left(z^{-\nu}\mathrm{e}^{-\gamma_\nu\tau}\lambda_{\nu k} + z^{\nu}\mathrm{e}^{-\gamma_{-\nu}\tau}\mu^{\sharp}_{\nu k}\right)\mathrm{e}^{\gamma_k\tau'}\Omega_k(\theta';\tau')\right.$$

$$\left.+\left(z^{-\nu}\mathrm{e}^{-\gamma_\nu\tau}\mu_{\nu k} + z^{\nu}\mathrm{e}^{-\gamma_{-\nu}\tau}\lambda^{\sharp}_{\nu k}\right)\mathrm{e}^{\gamma_{-k}\tau'}\Omega^{\sharp}_k(\theta';\tau')\right]$$

$$+\frac{\Pi_0(\theta;\tau)}{s_0(\tau)}\sum_{k=1}^{(N-1)/2}\frac{1}{r_k(\tau')}\left[\Omega^{\sharp}_k(\theta';\tau')s_k(\tau') - \Omega_k(\theta';\tau')s^{\sharp}_k(\tau')\right]$$

$$+\frac{\Omega_0(\theta';\tau')}{s_0(\tau')}\sum_{k=(N+1)/2}^{\infty}\frac{1}{r_k(\tau)}\left[\Pi^{\sharp}_k(\theta;\tau)s_k(\tau) - \Pi_k(\theta;\tau)s^{\sharp}_k(\tau)\right] \quad (9.2.29)$$

である．ただし，$\mu_{\nu 0} = \mu^{\sharp}_{\nu 0} = 0$ とした．(9.2.25) と (9.2.26) は，(9.1.25) を書き換えるために使うこともできて，

$$I(\theta,\theta';\tau,\tau') = \sum_{k=(N+1)/2}^{\infty}\frac{1}{r_k(\tau')}\left[\mathrm{e}^{-\gamma_{-k}(\tau'-\tau)}\Pi^{\sharp}_k(\theta;\tau)\Pi_k(\theta';\tau')\right.$$

$$\left.-\ \mathrm{e}^{-\gamma_k(\tau'-\tau)}\Pi_k(\theta;\tau)\Pi^{\sharp}_k(\theta';\tau')\right]$$

$$+\ \frac{\Pi_0(\theta;\tau)}{s_0(\tau)}\sum_{k=(N+1)/2}^{\infty}\frac{1}{r_k(\tau')}\left[\Pi^{\sharp}_k(\theta';\tau')s_k(\tau') - \Pi_k(\theta';\tau')s^{\sharp}_k(\tau')\right]$$

$$-\ \frac{\Pi_0(\theta';\tau')}{s_0(\tau')}\sum_{k=(N+1)/2}^{\infty}\frac{1}{r_k(\tau)}\left[\Pi^{\sharp}_k(\theta;\tau)s_k(\tau) - \Pi_k(\theta;\tau)s^{\sharp}_k(\tau)\right] \quad (9.2.30)$$

を得る．

(8.4.13) 式より，$n \geq 0$ に対して $\gamma_n = \gamma_{-n}$ および $\gamma_{n+1} > \gamma_n$ が満たされる．この条件の下で，長時間極限 $\tau_j \to \infty$, $j = 1,2,\cdots,M$ をとると，$\Omega_n(\theta;\tau) \sim O(1)$, $\Omega^{\sharp}_n(\theta;\tau) \sim O(1)$, $\Pi_n(\theta;\tau) \sim O(\mathrm{e}^{-2\gamma_n\tau})$，および $\Pi^{\sharp}_n(\theta;\tau) \sim O(\mathrm{e}^{-2\gamma_n\tau})$ が，$n \geq 1$ に対して導かれる．さらに，

$$\Omega_0(\theta;\tau) \sim O(\mathrm{e}^{-(\gamma_0-\gamma_{(N-1)/2})\tau}), \quad \Pi_0(\theta;\tau) \sim O(\mathrm{e}^{-(\gamma_0+\gamma_{(N+1)/2})\tau}) \quad (9.2.31)$$

なので，結局，

$$S(\theta,\theta';\tau,\tau') \sim S_1(\theta,\theta';\tau,\tau') + O(\mathrm{e}^{-(\gamma_{(N+1)/2}-\gamma_{(N-1)/2})\tau}), \qquad (9.2.32)$$

$$I(\theta,\theta';\tau,\tau') \sim O(\mathrm{e}^{-\gamma_{(N+1)/2}(\tau+\tau')}), \quad D(\theta,\theta';\tau,\tau') \sim O(\mathrm{e}^{\gamma_{(N-1)/2}(\tau+\tau')}) \qquad (9.2.33)$$

を得る．したがって，I_{jl}^{mn} と D_{jl}^{mn} は長時間極限においてゼロにおくことができ，N が偶数のときと同じ行列式表示 (9.2.15) が導かれる．行列要素 σ_{jl}^{mn} は，N が偶数のときと同じく，(9.2.14) によって与えられる．ただし，$S_1(\theta,\theta';\tau,\tau')$ と $g(\theta,\varphi;\tau)$ の定義が異なっていることに注意すべきである．

章末問題

[1] $U(\theta)=1$ で N が偶数の場合を考えよう．対称ユニタリ行列の初期条件に対する歪直交多項式は，

$$R_n(\theta;0)=z^n, \quad R_n^\sharp(\theta;0)=z^{-n}, \quad r_n(0)=\frac{4\pi i}{n+(1/2)}$$

で与えられ，自己双対四元数ユニタリ行列の初期条件に対する歪直交多項式は，

$$R_n(\theta;0)=z^n, \quad R_n^\sharp(\theta;0)=z^{-n}, \quad r_n(0)=4\pi i\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

で与えられることを示せ．

[2] $U(\theta)=1$ で N が奇数の場合には，対称ユニタリ行列の初期条件に対する歪直交多項式は，

$$\Omega_n(\theta;0)=z^n, \quad \Omega_n^\sharp(\theta;0)=z^{-n}, \quad r_n(0)=\frac{4\pi i}{n} \quad (n\geq 1),$$

および

$$\Omega_0(\theta;0)=\sum_{j=-(N-1)/2}^{(N-1)/2}(-z)^j$$

によって与えられることを示せ．

[3] $U(\theta)=1$ の場合に，上の結果を使って動的相関関数の漸近形を評価し，7.1.3 項と 7.2.3 項で導いたバルク極限形と一致することを確かめよ．

第10章 固有値の最近接間隔分布と最大固有値分布

ランダム行列モデルの応用においては，固有値の並びの順序を考慮に入れた統計量が必要になることがある．最近接間隔分布や最大固有値分布が，その典型的な例である．これらの統計量も，以下に示すように，形式的には第 6 章と第 7 章で議論したような固有値相関関数を用いて表すことができる．しかし，任意次数までの相関関数について，無限和を評価しなければならない．この無限和を直接計算する代わりに，非線形微分方程式（パンルヴェ方程式 [69, 106]）の解を使って，これらの統計量を評価する方法がある．この事実は，最近接間隔分布の場合には，かなり以前に発見されていたが [70]，近年になって，一般的な統計量の場合に拡張された [132, 133, 134, 135, 136]．以下では，最も簡単なガウス型ユニタリアンサンブルの最近接間隔分布と最大固有値分布をとりあげ，それらが，パンルヴェ方程式の解によってどのように表されるかを議論する．

10.1　フレドホルム行列式

実軸上に m 個の（互いに重なり合わない）区間 $I_1, I_2, \cdots, I_m$ をとり，その和集合を I と書くことにする．すなわち，

$$I = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_m \tag{10.1.1}$$

である．全固有値の確率分布関数を $P(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ とするとき，n 個の固有値を I 内にみつける確率は，

$$E(n; I) = \frac{N!}{n!(N-n)!} \int \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_N P(x_1, x_2, \cdots, x_N) \times \prod_{j=1}^{n} \chi_I(x_j) \prod_{l=n+1}^{N} (1 - \chi_I(x_l)) \tag{10.1.2}$$

になる．ただし，P は規格化されていて，

$$\int \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_N P(x_1, x_2, \cdots, x_N) = 1 \tag{10.1.3}$$

を満たすとする．また，関数 $\chi_I(x)$ は，

$$\chi_I(x) = \begin{cases} 1, & x \in I, \\ 0, & x \notin I \end{cases} \tag{10.1.4}$$

によって定義される．

ここで，$E(n; I)$ を，固有値相関関数を使って表すことを考えてみよう．ユニタリアンサンブルにおいては，固有値相関関数

$$\rho_k(x_1, \cdots, x_k) = \frac{N!}{(N-k)!} \int \cdots \int \mathrm{d}x_{k+1} \cdots \mathrm{d}x_N P(x_1, \cdots, x_N) \tag{10.1.5}$$

は，行列式

$$\rho_k(x_1, \cdots, x_k) = \det[K(x_j, x_l)]_{j,l=1,2,\cdots,k} \tag{10.1.6}$$

の形に書ける（6.1 節参照）．ここで，

$$K(x, y) = \sqrt{w(x)w(y)} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{h_n} C_n(x) C_n(y) \tag{10.1.7}$$

であり，多項式 $C_n(x)=x^n+\cdots$ は，重み関数 $w(x)$ に対する直交関係

$$\int w(x)C_m(x)C_n(x)\mathrm{d}x=h_n\delta_{mn} \tag{10.1.8}$$

を満たす．相関関数に対して，量

$$r(k)=\int\cdots\int \mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_k\rho_k(x_1,x_2,\cdots,x_k)\prod_{j=1}^{k}\chi_I(x_j) \tag{10.1.9}$$

を定義する．このとき，因子 $\prod_{l=n+1}^{N}(1-\chi_I(x_l))$ を展開して，同じ数の $\chi_I(x)$ をもつ項をまとめることにより，

$$\begin{aligned}E(n;I)&=\frac{1}{n!}\sum_{k=n}^{N}\frac{(-1)^{k-n}}{(k-n)!}\int\cdots\int\rho_k(x_1,x_2,\cdots,x_k)\prod_{l=1}^{k}\chi_I(x_l)\mathrm{d}x_l\\&=\frac{(-1)^n}{n!}\sum_{k=n}^{N}\frac{(-1)^k}{(k-n)!}r(k)\end{aligned} \tag{10.1.10}$$

を導くことができる．こうして，確率 $E(n;I)$ を，固有値相関関数を用いて表すことができた．n の値によらず，任意次数までの相関関数が必要であることに，注意してもらいたい．

確率 $E(n;I)$ がわかると，それから固有値の並びの順序を考慮に入れた統計量を評価することができる．たとえば，最近接間隔分布 $p_{\mathrm{spacing}}(s)\mathrm{d}s$ は，1 つの固有値が 0 にある条件の下で，隣の固有値が s と $s+\mathrm{d}s$ の間にある確率として定義される．$I=(0,s)=\{x\,|\,0<x<s\}$ としたとき，区間 I 内に固有値がない確率は $E(0;I)$ で与えられる．したがって，区間 I に固有値がなく，かつ微小区間 $\delta I=(s,s+\delta s)$ に固有値がある確率 $F(0;I)\delta s$ は，$E(0;I)-E(0;I+\delta I)$ になる．いま，固有値密度が 1（すなわち，長さ δs の微小区間に固有値がある確率が δs）であるとしよう．このとき，$\delta s\to 0$ の極限をとると，1 つの固有値が区間 I の端にある条件の下で,（端を除く）区間内部には固有値がない確率として，

$$F(0;I)=\lim_{\delta s\to 0}\frac{E(0;I)-E(0;I+\delta I)}{\delta s}=-\frac{\mathrm{d}E(0;I)}{\mathrm{d}s} \tag{10.1.11}$$

を得る．同様にして，1 つの固有値が 0 にある条件の下で，区間 I の（端を除く）内部に固有値がなく，かつ微小区間 $\delta I = (s, s+\delta)$ に固有値がある確率 $p_{\rm spacing}(s)\delta s$ は，$F(0;I) - F(0;I+\delta I)$ で与えられる．したがって，$\delta s \to 0$ の極限では，

$$p_{\rm spacing}(s) = -\frac{{\rm d}F(0;I)}{{\rm d}s} = \frac{{\rm d}^2}{{\rm d}s^2}E(0;I) \tag{10.1.12}$$

となる．

もう 1 つの例として，最大固有値分布 $p_{\rm largest}(s){\rm d}s$ をとりあげよう．このときは，区間としては $I = (s, \infty) = \{x \,|\, x > s\}$ をとる．(端を除く）区間 I 内部に固有値がなく，区間の端の $(s - {\rm d}s, s)$ 内に固有値がある確率を考えればよいから，

$$p_{\rm largest}(s) = \frac{{\rm d}E(0;I)}{{\rm d}s} \tag{10.1.13}$$

を得る．

ここで，確率 $E(n;I)$ のフレドホルム行列式による表現を導入しよう．まず，演算子の行列式の概念を説明しておこう．線形演算子 $\hat{A}$ がベクトル空間 $|f\rangle$ に作用しているとき，ベクトル空間の正規直交基底を $|n\rangle, n = 0, 1, 2, \cdots$ とする．このとき，$\hat{A}|n\rangle$ と $|m\rangle$ の内積 $\langle m|\hat{A}|n\rangle$, $m, n = 0, 1, 2, \cdots$ は（ときには無限次の）行列になるので，その行列式を考えることができる．

いま考えている演算子は，実軸上の関数に作用する．このような演算子については，核 (kernel) を考えることができる．すなわち，演算子 $\hat{A}$ の関数 f への作用 $\hat{A}f = g$ が，

$$\int A(x,y)f(y){\rm d}y = g(x) \tag{10.1.14}$$

のように表現されるとき，$A(x,y)$ は $\hat{A}$ の核である．ここで，同じ演算子 $\hat{A}$ が右から作用したときには，$g(x)$ の代わりに，

$$\int f(x)A(x,y){\rm d}y \tag{10.1.15}$$

を得ることに注意してもらいたい．また，$\hat{A}$ が 2 変数関数 $F(x,y)$ に左から作用したときには，

$$\int A(x,z)F(z,y)\mathrm{d}z \tag{10.1.16}$$

を，右から作用したときには，

$$\int F(x,z)A(z,y)\mathrm{d}z \tag{10.1.17}$$

を得る．

ここで，関数 $\lambda K(x,y)\chi_I(y)$ を核にもつ演算子を $\hat{K}$ と定義しよう．このとき，フレドホルム行列式は，

$$D(\lambda;I) = \det(\hat{I} - \hat{K}) \tag{10.1.18}$$

のように定義される（$\hat{I}$ は恒等演算子．以後，たんに 1 と書く）．フレドホルム行列式の λ についての展開（フレドホルム展開）を行うと，

$$D(\lambda;I) = 1 + \sum_{k=1}^{N}(-1)^k \frac{\lambda^k}{k!} r(k) \tag{10.1.19}$$

を得る．したがって，(10.1.10) と (10.1.19) を比較すると，

$$E(n;I) = \frac{(-1)^n}{n!} \left. \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} D(\lambda;I) \right|_{\lambda=1} \tag{10.1.20}$$

になることがわかる．フレドホルム行列式は，この関係を通して，固有値の並びの順序を考慮に入れた統計量と関係している．以下では，フレドホルム行列式が，パンルヴェ方程式の解によりどのように表現されるかを考える．

10.2　最近接間隔分布

いま，$K(x,y)$ は，

$$K(x,y) = \frac{A(x)B(y) - B(x)A(y)}{x-y} \tag{10.2.1}$$

の形をとると仮定し，

$$K(x,y)\chi_I(y), \quad I = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_m, \quad I_j = (a_{2j-1}, a_{2j}) \tag{10.2.2}$$

を核にもつ演算子を $\hat{K}$ と定義する．演算子

$$\frac{\partial \hat{K}}{\partial a_j} \tag{10.2.3}$$

の核は，

$$(-1)^j K(x,a_j)\delta(y-a_j) \tag{10.2.4}$$

になる．さらに，レゾルベント演算子 $\hat{R}$ を，

$$\hat{R} = (1-\hat{K})^{-1}\hat{K} \tag{10.2.5}$$

によって導入し，その核を $R(x,y)$ とする．レゾルベント演算子が重要なのは，$\log\det(1-\hat{K}) = \mathrm{Tr}\log(1-\hat{K})$ の関係から，

$$\frac{\partial}{\partial a_j}\log\det(1-\hat{K}) = -\mathrm{Tr}(I-\hat{K})^{-1}\frac{\partial \hat{K}}{\partial a_j} \tag{10.2.6}$$

が成立し，(10.2.4) より，$(\partial/\partial a_j)\log\det(1-\hat{K})$ の核が，

$$\begin{aligned}
&(-1)^{j-1}\int \mathrm{d}x(1-\hat{K})^{-1}K(x,a_j)\delta(x-a_j) \\
&= (-1)^{j-1}\int \mathrm{d}xR(x,a_j)\delta(x-a_j) \\
&= (-1)^{j-1}R(a_j,a_j)
\end{aligned} \tag{10.2.7}$$

になるからである．すなわち，レゾルベント演算子の核の特殊な点における値 $R(a_j,a_j)$ がわかれば，それから，フレドホルム行列式 $\det(1-\hat{K})$ を計算することができる．ここで，演算子 $(1-\hat{K})^{-1}$ の核は $\rho(x,y)$ であるとし，

$$\begin{aligned}
Q(x) &= (1-\hat{K})^{-1}A(x) = \int \rho(x,y)A(y)\mathrm{d}y, \\
P(x) &= (1-\hat{K})^{-1}B(x) = \int \rho(x,y)B(y)\mathrm{d}y
\end{aligned} \tag{10.2.8}$$

を定義する．このとき，次の **定理** *10.1* が成立する．

定理 *10.1*　レゾルベント演算子 $\hat{R}$ の核 $R(x,y)$ は，$x, y \in I$ に対して，

$$R(x,y) = \frac{Q(x)P(y) - P(x)Q(y)}{x - y}, \tag{10.2.9}$$

$$R(x,x) = \frac{\mathrm{d}Q(x)}{\mathrm{d}x}P(x) - \frac{\mathrm{d}P(x)}{\mathrm{d}x}Q(x) \tag{10.2.10}$$

によって与えられる．

証明 「x をかける演算子」を $\hat{M}$ としよう．つまり，$\hat{M}$ の核は $x\delta(x-y)$ で与えられ，したがって，$\hat{M}f(x,y) = xf(x,y)$ かつ $f(x,y)\hat{M} = f(x,y)y$ である．すると $\hat{M}$ と $\hat{K}$ の交換関係

$$[\hat{M}, \hat{K}] = \hat{M}\hat{K} - \hat{K}\hat{M} \tag{10.2.11}$$

の核は，

$$xK(x,y)\chi_I(y) - K(x,y)\chi_I(y)y = (A(x)B(y) - B(x)A(y))\chi_I(y) \tag{10.2.12}$$

となる．したがって，

$$[\hat{M}, (1-\hat{K})^{-1}] = (1-\hat{K})^{-1}[\hat{M}, \hat{K}](1-\hat{K})^{-1} \tag{10.2.13}$$

の核は，

$$Q(x)B(y)\chi_I(y)(1-\hat{K})^{-1} - P(x)A(y)\chi_I(y)(1-\hat{K})^{-1} \tag{10.2.14}$$

となる．これは，$K(x,y) = K(y,x)$ に注意すると，$y \in I$ のときには，

$$Q(x)P(y) - P(x)Q(y) \tag{10.2.15}$$

に等しい．一方，$\hat{R}$ の核 $R(x,y)$ に対して，

$$\rho(x,y) = \delta(x-y) + R(x,y) \tag{10.2.16}$$

が成り立つので，$[\hat{M},(1-\hat{K})^{-1}]$ の核は，

$$x\rho(x,y)-\rho(x,y)y=(x-y)R(x,y) \tag{10.2.17}$$

とも書ける．(10.2.15) と (10.2.17) を比べると，**定理** *10.1* の最初の式が証明される．さらに，第 2 の式は，最初の式の極限として証明できる．

（証明終）

ここで，x を区間 I の内側からその端に近づける極限をとることにより，

$$q_j=\lim_{x\to a_j}Q(x), \quad p_j=\lim_{x\to a_j}P(x) \tag{10.2.18}$$

を定義する．すると，**定理** *10.1* より，

$$R(a_j,a_l)=\frac{q_jp_l-p_jq_l}{a_j-a_l}, \quad j\neq l \tag{10.2.19}$$

を得る．また，演算子 $\partial\hat{K}/\partial a_j$ が (10.2.4) によって与えられることから，演算子

$$\frac{\partial}{\partial a_j}(1-\hat{K})^{-1}=(1-\hat{K})^{-1}\frac{\partial\hat{K}}{\partial a_j}(1-\hat{K})^{-1} \tag{10.2.20}$$

の核は，

$$\frac{\partial}{\partial a_j}(1-K)^{-1}=(-1)^jR(x,a_j)\rho(a_j,y) \tag{10.2.21}$$

になることがわかる．したがって，

$$\frac{\partial Q(x)}{\partial a_l}=(-1)^lR(x,a_l)q_l, \quad \frac{\partial P(x)}{\partial a_l}=(-1)^lR(x,a_l)p_l \tag{10.2.22}$$

である．これから，ただちに，

$$\frac{\partial q_j}{\partial a_l}=(-1)^lR(a_j,a_l)q_l, \quad j\neq l \tag{10.2.23}$$

および

$$\frac{\partial p_j}{\partial a_l}=(-1)^lR(a_j,a_l)p_l, \quad j\neq l \tag{10.2.24}$$

を得る．

ここまでは，関数 $A(x)$ および $B(x)$ の形によらず，一般的に成り立つ関係だけを導いた．ここで，ガウス型ユニタリアンサンブルに対しては，

$$A(x) = \sqrt{\lambda}\left(\frac{N}{2}\right)^{1/4} \varphi_N(x),$$
$$B(x) = \sqrt{\lambda}\left(\frac{N}{2}\right)^{1/4} \varphi_{N-1}(x) \tag{10.2.25}$$

とおけばよいことに注目する（(2.4.44),(2.4.45),(6.1.17) 参照）．ただし，$\varphi_n(x)$ は，Hermite 多項式 $H_n(x)$ を用いて，

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}\mathrm{e}^{-x^2/2}H_n(x) \tag{10.2.26}$$

のように定義される．このとき，$A(x)$ と $B(x)$ に対しては，微分公式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}A(x) = -xA(x) + \sqrt{2N}B(x),$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}B(x) = -\sqrt{2N}A(x) + xB(x) \tag{10.2.27}$$

が成り立つ．

ここで，微分演算子 $\hat{D}$ を導入しよう．つまり，$\hat{D}$ の核は $\partial\delta(x-y)/\partial x$ で与えられ，したがって，$\hat{D}f(x,y) = \partial f(x,y)/\partial x$ かつ $f(x,y)\hat{D} = -\partial f(x,y)/\partial y$ である．まず，交換関係 $[\hat{D},\hat{K}]$ の核は，微分公式 (10.2.27) を使うと，

$$-A(x)B(y) - B(x)A(y) - \sum_{l=1}^{2m}(-1)^l K(x,a_l)\delta(y-a_l) \tag{10.2.28}$$

になるので，交換関係

$$[\hat{D},(1-\hat{K})^{-1}] = (1-\hat{K})^{-1}[\hat{D},\hat{K}](1-\hat{K})^{-1} \tag{10.2.29}$$

の核は，

$$-Q(x)B(y)\chi_I(y)(1-\hat{K})^{-1} - P(x)A(y)\chi_I(y)(1-\hat{K})^{-1}$$
$$-\sum_{l=1}^{2m}(-1)^l R(x,a_l)\rho(a_l,y) \tag{10.2.30}$$

である．この交換関係を使えば，$Q(x)$ と $P(x)$ の x 微分を計算することができて，

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}Q(x)=\hat{D}(1-\hat{K})^{-1}A(x)\\&=(1-\hat{K})^{-1}\hat{D}A(x)+[\hat{D},(1-\hat{K})^{-1}]A(x)\\&=-Q_1(x)+\sqrt{2N}P(x)-vQ(x)-uP(x)-\sum_{l=1}^{2m}(-1)^l R(x,a_l)q_l\end{aligned}\tag{10.2.31}$$

および

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P(x)=\hat{D}(1-\hat{K})^{-1}B(x)\\&=(1-\hat{K})^{-1}\hat{D}B(x)+[\hat{D},(1-\hat{K})^{-1}]B(x)\\&=-\sqrt{2N}Q(x)+P_1(x)-wQ(x)-vP(x)-\sum_{l=1}^{2m}(-1)^l R(x,a_l)p_l\end{aligned}\tag{10.2.32}$$

を得る．ただし，

$$\begin{aligned}u&=\int_I \mathrm{d}xQ(x)A(x),\\w&=\int_I \mathrm{d}xP(x)B(x),\\v&=\int_I \mathrm{d}xP(x)A(x)=\int_I \mathrm{d}xQ(x)B(x)\end{aligned}\tag{10.2.33}$$

および

$$\begin{aligned}Q_1(x)&=(1-\hat{K})^{-1}xA(x)=xQ(x)-vQ(x)+uP(x),\\P_1(x)&=(1-\hat{K})^{-1}xB(x)=xP(x)-wQ(x)+vP(x)\end{aligned}\tag{10.2.34}$$

である．$Q(x)$ と $P(x)$ の x 微分に $x=a_j$ を代入し，(10.2.19) を使うと，

$$\frac{\partial q_j}{\partial a_j} = -Q_1(a_j) + \sqrt{2N}p_j - vq_j - up_j - \sum_{l \neq j}^{2m} (-1)^l R(a_j, a_l) q_l$$

$$= -a_j q_j + (\sqrt{2N} - 2u)p_j - \sum_{l \neq j}^{2m} (-1)^l \frac{q_j p_l - p_j q_l}{a_j - a_l} q_l \qquad (10.2.35)$$

および

$$\frac{\partial p_j}{\partial a_j} = -\sqrt{2N}q_j + P_1(a_j) - wq_j - vp_j - \sum_{l \neq j}^{2m} (-1)^l R(a_j, a_l) p_l$$

$$= a_j p_j - (\sqrt{2N} + 2w)q_j - \sum_{l \neq j}^{2m} (-1)^l \frac{q_j p_l - p_j q_l}{a_j - a_l} p_l \qquad (10.2.36)$$

を得る．一方，(10.2.31) と (10.2.32) を (10.2.10) に代入すると，

$$R(a_j, a_j) = -2a_j p_j q_j + (\sqrt{2N} - 2u)p_j^2 + (\sqrt{2N} + 2w)q_j^2$$
$$+ \sum_{l \neq j}^{2m} (-1)^l \frac{(q_j p_l - p_j q_l)^2}{a_j - a_l} \qquad (10.2.37)$$

を導くことができる．最後に，u の満たす関係式

$$\frac{\partial u}{\partial a_l} = \int_I \mathrm{d}x \frac{\partial Q}{\partial a_l} A(x) + (-1)^l Q(a_l) A(a_l)$$
$$= (-1)^l q_l \int \mathrm{d}x \rho(x, a_l) A(x)$$
$$= (-1)^l q_l^2 \qquad (10.2.38)$$

と，同様にして証明できる w の満たす関係式

$$\frac{\partial w}{\partial a_l} = (-1)^l p_l^2 \qquad (10.2.39)$$

を挙げておこう．

さて，必要な式がそろったので，極限 $N \to \infty$ を，スケーリング

$$a_m \mapsto z + \frac{1}{\sqrt{2N - z^2}} a_m \qquad (10.2.40)$$

の下で評価する．第 7 章でも議論したように，このスケーリングは，固有値密度が Wigner の半円則 $\rho(z) = \sqrt{2N - z^2}/\pi$ で与えられているときに，点 z のまわりにおいて，平均準位間隔（すなわち固有値密度の逆数）程度の幅の領域内で観測していることに相当する．z は，$\sqrt{N}$ の程度の大きさであることに注意して，$z = \sqrt{2N}\eta$ とおく $(-1 < \eta < 1)$．$N \to \infty$ の極限をとると，

$$
\begin{aligned}
\cos\theta \frac{\partial q_j}{\partial a_j} &= -\sin\theta q_j + p_j - \cos\theta \sum_{l \neq j}^{2m} (-1)^l \frac{q_j p_l - p_j q_l}{a_j - a_l} q_l, \\
\cos\theta \frac{\partial p_j}{\partial a_j} &= \sin\theta p_j - q_j - \cos\theta \sum_{l \neq j}^{2m} (-1)^l \frac{q_j p_l - p_j q_l}{a_j - a_l} p_l, \\
\frac{R(a_j, a_j)}{\sqrt{2N}} &= -2\sin\theta p_j q_j + p_j^2 + q_j^2 + \cos\theta \sum_{l \neq j}^{2m} (-1)^l \frac{(q_j p_l - p_j q_l)^2}{a_j - a_l}
\end{aligned}
\tag{10.2.41}
$$

を得る．ただし，$\eta = \sin\theta$ とした $(-\pi/2 < \theta < \pi/2)$．さらに，変数変換

$$
\begin{aligned}
q_j &\mapsto \frac{1}{\sqrt{\cos\theta}} \left(q_j \cos\frac{\theta}{2} + p_j \sin\frac{\theta}{2} \right), \\
p_j &\mapsto \frac{1}{\sqrt{\cos\theta}} \left(p_j \cos\frac{\theta}{2} + q_j \sin\frac{\theta}{2} \right), \\
\frac{R(a_j, a_j)}{\sqrt{2N}\cos\theta} &\mapsto R(a_j, a_j)
\end{aligned}
\tag{10.2.42}
$$

を行うと，

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial q_j}{\partial a_j} &= p_j - \sum_{l \neq j}^{2m} (-1)^l \frac{q_j p_l - p_j q_l}{a_j - a_l} q_l, \\
\frac{\partial p_j}{\partial a_j} &= -q_j - \sum_{l \neq j}^{2m} (-1)^l \frac{q_j p_l - p_j q_l}{a_j - a_l} p_l, \\
R(a_j, a_j) &= p_j^2 + q_j^2 + \sum_{l \neq j}^{2m} (-1)^l \frac{(q_j p_l - p_j q_l)^2}{a_j - a_l}
\end{aligned}
\tag{10.2.43}
$$

となり，η への依存性が消滅する．これは，いま考えているスケールでは，どこに η をとっても，固有値相関の局所的な振る舞い (7.1.12) は同一であること（一様性）の反映である．バルク領域における $R(a_j, a_j)$ を決定するこの微分方程式系は，発見者の名をとり，JMMS 方程式と呼ばれる [70, 132].

ここで，$I = (t, -t)$ の場合を考えると，最近接間隔分布を $R(-t, t)$ を使って書くことができる．このとき，$q \equiv q_1 = -q_2$, $p \equiv p_1 = p_2$ になることに注意すると，

$$\begin{aligned} R(-t,t) &= -\frac{1}{t}qp, \\ R(t,t) &= q^2 + p^2 - \frac{2}{t}q^2p^2, \\ \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} &= -p + \frac{2}{t}q^2p, \\ \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} &= q - \frac{2}{t}p^2q \end{aligned} \tag{10.2.44}$$

が導かれる．これらの関係を使って計算すると，

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{tR(-t,t)\} &= p^2 - q^2, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{tR(t,t)\} &= q^2 + p^2, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R(t,t) &= 2\{R(-t,t)\}^2 \end{aligned} \tag{10.2.45}$$

となることがわかる．これらのうち，第 1 式と第 2 式から，

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{tR(t,t)\}\right]^2 - \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\{tR(-t,t)\}\right]^2 = 4t^2\{R(-t,t)\}^2 \tag{10.2.46}$$

を得るので，第 3 式を使って $R(-t,t)$ を消去すれば，$R(t,t)$ に対する閉じた微分方程式を導くことができる．いま，$\sigma(x)$ を，

$$\sigma(x) = -2tR(t,t), \quad x = 2t \tag{10.2.47}$$

によって定義すると，閉じた微分方程式は，

$$(x\sigma'')^2 + 4(x\sigma' - \sigma)(x\sigma' - \sigma + (\sigma')^2) = 0 \tag{10.2.48}$$

の形に書ける．これは，パンルヴェ方程式として知られる微分方程式系のうちの 1 つ，パンルヴェ V に該当する非線形微分方程式である．

フレドホルム行列式は，(10.2.7) の関係より，$\sigma(x)$ を使って，

$$\det(1-\hat{K}) = \exp\left\{\int_0^{\pi s} \frac{\sigma(x)}{x}\mathrm{d}x\right\}, \quad s = 2t/\pi \tag{10.2.49}$$

の形に書ける．ただし，変数 s は，固有値密度が 1 になるように規格化されている．ここで，展開

$$\log\det(1-\hat{K}) = \mathrm{Tr}\log(1-\hat{K}) = -\mathrm{Tr}\ \hat{K} - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ \hat{K}^2 + \cdots \tag{10.2.50}$$

の各項を (7.1.12) を使って評価することにより，漸近形

$$\log\det(1-\hat{K}) = -s - \frac{1}{2}s^2 + \cdots, \quad s \to 0 \tag{10.2.51}$$

を導くことができる．したがって，非線形微分方程式 (10.2.48) の境界条件は，

$$\sigma(x) = -\frac{x}{\pi} - \left(\frac{x}{\pi}\right)^2 + \cdots, \quad x \to 0 \tag{10.2.52}$$

によって与えられることがわかる．

このように，バルク領域における最近接間隔分布を与えるフレドホルム行列式は，非線形微分方程式（パンルヴェ V 方程式）を解くことにより評価できることが示された．また，ガウス型直交アンサンブル，ガウス型シンプレクティックアンサンブルの最近接間隔分布も，上で導いたパンルヴェ V 方程式の解を使って書くことができる [84, 132]．非線形微分方程式の解析に関わる詳しい議論については，原論文を参照してもらいたい．

最近接間隔分布については，Wigner によって提案された近似形（Wigner 推測）が知られている．Wigner 推測は，ガウス型直交アンサンブル，ガウス型ユニタリアンサンブル，ガウス型シンプレクティックアンサンブルのそ

れぞれに対して，

$$p_{\mathrm{spacing}}(s) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} s \mathrm{e}^{-(\pi/4)s^2}, \\ \dfrac{32}{\pi^2} s^2 \mathrm{e}^{-(4/\pi)s^2}, \\ \dfrac{262144}{729\pi^3} s^4 \mathrm{e}^{-(64/(9\pi))s^2} \end{cases} \tag{10.2.53}$$

の形をとる．これらは，実用上役に立つ良い近似を与えるが，パンルヴェ V 方程式によって記述される厳密解とは，わずかに異なっている．

10.3 最大固有値分布

次に，最大固有値分布を記述するフレドホルム行列式を考えてみよう．最大固有値分布は，応用上とくに重要な量であるが，以下にみるように，非常に簡単な（しかし非線形の）微分方程式を解くことによって評価できる．

ここでも，再び，単一区間 $[a_1, a_2]$ に対応するフレドホルム行列式を扱えばよい．ただし，半無限の区間 $I = (a_1, \infty)$ を考える必要がある．この場合，必要な式 (10.2.35)–(10.2.39) は，

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s} &= -sq + \left(\sqrt{2N} - 2u\right) p, \\ \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s} &= sp - \left(\sqrt{2N} + 2w\right) q, \\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} &= -q^2, \\ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s} &= -p^2 \end{aligned} \tag{10.3.1}$$

および

$$R(s) = -2spq + (\sqrt{2N} - 2u)p^2 + (\sqrt{2N} + 2w)q^2 \tag{10.3.2}$$

の形になる．これらの式を使い，まず $R(s)$ の微分を計算すると，

$$R' = -2pq \tag{10.3.3}$$

が容易にわかる．次に，pq の微分は，

$$(pq)' = (\sqrt{2N} - 2u)p^2 - (\sqrt{2N} + 2w)q^2 \tag{10.3.4}$$

になる．一方，$\sqrt{2N}(u - w) + 2uw$ の微分を計算すると，

$$(\sqrt{2N}(u - w) + 2uw)' = (\sqrt{2N} - 2u)p^2 - (\sqrt{2N} + 2w)q^2 \tag{10.3.5}$$

であり，pq の微分とまったく同じになる．したがって，$s \to \infty$ では p, q, u, w はいずれもゼロに近づくことを考慮に入れると，

$$\sqrt{2N}(u - w) + 2uw = pq \tag{10.3.6}$$

である．さて，以上の結果を使って $R(s)$ の 3 次微分を計算すると，

$$\begin{aligned}
R''' &= -2((\sqrt{2N} - 2u)p^2 - (\sqrt{2N} + 2w)q^2)' \\
&= -4s\left\{(\sqrt{2N} - 2u)p^2 + (\sqrt{2N} + 2w)q^2\right\} \\
&\quad +16pq\left\{N - \sqrt{2N}(u - w) - 2uw\right\} - 8p^2q^2 \\
&= -4s\,(R + 2spq) + 16pq(N - pq) - 8p^2q^2 \\
&= -4sR + 4s^2R' - 8NR' - 6(R')^2
\end{aligned} \tag{10.3.7}$$

を得る．すなわち，$R(s)$ に対する閉じた微分方程式を求めることができた．

最大固有値の分布を考えているのであるから，問題になるのは分布の端（ソフトエッジ）の領域である．第 7 章においてソフトエッジの固有値相関を評価するために行ったスケーリング

$$s \mapsto \sqrt{2N} + \frac{s}{2^{1/2}N^{1/6}} \tag{10.3.8}$$

を，ここで再び導入する．$R(s)$ に対しても，スケーリング

$$R(s) \mapsto 2^{1/2}N^{1/6}R(s) \tag{10.3.9}$$

を行い，$N \to \infty$ の極限をとると，微分方程式は，

$$R''' = -2R + 4sR' - 6(R')^2 \tag{10.3.10}$$

になる．さらに，$R(s)$ を，

$$R(s) = \int_s^\infty \mathrm{d}x (q(x))^2 \tag{10.3.11}$$

のように書くと，$q(s)$ の満たす微分方程式は，

$$q'' = sq + 2q^3 \tag{10.3.12}$$

と，たいへん簡単になる．これは，パンルヴェ微分方程式系の中で，パンルヴェ II に分類される非線形微分方程式である．

フレドホルム行列式は，$R(x)$ または $q(x)$ を使って，

$$\begin{aligned} \det(1 - \hat{K}) &= \exp\left\{-\int_s^\infty R(x)\mathrm{d}x\right\} \\ &= \exp\left\{-\int_s^\infty (x-s)(q(x))^2 \mathrm{d}x\right\} \end{aligned} \tag{10.3.13}$$

と書ける．非線形微分方程式 (10.3.12) の境界条件は，展開

$$\log\det(1 - \hat{K}) = \mathrm{Tr}\log(1 - \hat{K}) = -\mathrm{Tr}\ \hat{K} + \cdots \tag{10.3.14}$$

に着目することにより，$s \to \infty$ において，

$$\begin{aligned} R(s) &= \frac{\partial}{\partial s}\log\det(1 - \hat{K}) \\ &\sim -\frac{\partial}{\partial s}\mathrm{Tr}\ \hat{K} \\ &= -\frac{\partial}{\partial s}\int_s^\infty \lambda K(x,x)\mathrm{d}x \\ &= \lambda K(s,s) \end{aligned} \tag{10.3.15}$$

になる．第 7 章において導いた漸近形 (7.1.16) から，

$$K(x,y) = \frac{\mathrm{Ai}(x)\mathrm{Ai}'(y) - A'(x)A(y)}{x-y} \tag{10.3.16}$$

とおけばよいので，Airy の微分方程式

$$\mathrm{Ai}''(x) = x\mathrm{Ai}(x) \tag{10.3.17}$$

に注意して計算すると，$q(s)$ に対する境界条件は，

$$\begin{aligned}
(q(s))^2 &\sim -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\lambda K(s,s) \\
&= -\lambda\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left\{(\mathrm{Ai}'(s))^2 - \mathrm{Ai}(s)\mathrm{Ai}''(s)\right\} \\
&= -\lambda\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left\{(\mathrm{Ai}'(s))^2 - s(\mathrm{Ai}(s))^2\right\} \\
&= -2\lambda\mathrm{Ai}'(s)\mathrm{Ai}''(s) + \lambda(\mathrm{Ai}(s))^2 + 2\lambda s\mathrm{Ai}(s)\mathrm{Ai}'(s) \\
&= \lambda(\mathrm{Ai}(s))^2
\end{aligned} \tag{10.3.18}$$

と書ける．すなわち，非線形微分方程式 (10.3.12) の解の中で，

$$q(s) \sim \sqrt{\lambda}\mathrm{Ai}(s), \quad s \to \infty \tag{10.3.19}$$

を満たすものを使えばよい．

このように，ガウス型ユニタリアンサンブルの最大固有値分布は，非線形微分方程式（パンルヴェ II 方程式）の解を使って書くことができる．ガウス型直交アンサンブル，ガウス型シンプレクティックアンサンブルの最大固有値分布も，同じパンルヴェ II 方程式の解を使って書ける [136]．第 6 章で導いた相関関数の四元数行列式表示を使ってそのことを証明できるが，ここでは省略する．興味のある読者は，原論文を参照してもらいたい．

章末問題

[1] 0 と 1 の間に，互いに独立に一様分布する乱数が N 個あるとしよう．乱数の間の最近接間隔 x はどのように分布するか．とくに，スケーリング $x = s/N$ を行うと，$N \to \infty$ の極限では，指数分布 $p_{\mathrm{spacing}}(s) = \mathrm{e}^{-s}$ が導かれることを示せ．

[2] パンルヴェ V 方程式 (10.2.48) に，$\sigma(x)$ の $x \to 0$ での漸近形 $\sigma(x) = -(x/\pi) - (x/\pi)^2 + \cdots$ を代入することにより，漸近形の高次の項を（x^4 に比例する項まで）計算せよ．また，その結果を使って，最近接間隔分布 $p_{\mathrm{spacing}}(s)$ の $s \to 0$ での振る舞いを評価し，Wigner 推測 (10.2.53) と比較せよ．

[3] $\sigma(x)$ の $x \to \infty$ での漸近形は，$\sigma(x) = -(1/4)x^2 + \cdots$ で与えられることが知られている．このことを使って，パンルヴェ V 方程式 (10.2.48) より，漸近形の高次の項を（$1/x^2$ に比例する項まで）計算せよ．

第11章　非エルミートランダム行列

ランダム行列の研究の多くは，エルミート行列（あるいはユニタリ行列）のような，特定の対称性をもち，固有値が 1 次元分布する場合に集中している．しかし，特定の対称性のないランダム行列に興味がある場合もある．そのような応用の先駆的な例としては，May による生態系の研究が知られている [25, 81]．最近では，ニューラルネットワークのダイナミクス [124]，開いた系におけるカオス的な散乱 [59]，メソスコピック系の Anderson 局在 [63]，量子色力学 (QCD) [126] など，物理学への応用も進展中である．場の理論的な方法による研究 [41, 104] や，固有ベクトル分布についての研究 [24, 82] も行われている．

この最後の章では，代表的な結果として，実ランダム行列の固有値密度に対する A. Edelman の式 [37] と，複素ランダム行列（Ginibre アンサンブル）の固有値相関 [53] を紹介する．実四元数ランダム行列については，本書では扱わないので，文献 [84] を参照してもらいたい．

11.1 実ランダム行列

A が，$N \times N$ 実行列であるとき，A のガウス型アンサンブルを，

$$P(A)(\mathrm{d}A) \propto \mathrm{e}^{-(1/2)\mathrm{Tr}A^{\mathrm{T}}A} \prod_{j=1}^{N}\prod_{l=1}^{N} \mathrm{d}A_{jl} \tag{11.1.1}$$

によって定義する．このアンサンブルにおいては，すべての実要素が独立にガウス分布している（$N=2$ の場合は，第 2 章のはじめに議論した）．

実行列 A を非特異行列 X によって対角化して，

$$A = XEX^{-1} \tag{11.1.2}$$

と書く（A が対角化できない場合は，確率がゼロなので考えない）．X はユニタリ行列ではなく，対角行列 E の対角要素は複素数である．注意すべきなのは，$\mathrm{Tr}\ A^{\mathrm{T}}A$ は，非特異行列 X に依存していることである．これが，ガウス型直交アンサンブルとの大きな違いである．すべての要素を独立にガウス分布させせると，アンサンブルが相似変換 $A \to XAX^{-1}$ の下で不変でなくなってしまうのである．そこで，固有値の分布関数を得るためには，直接対角化する代わりに，次のような分解を使うと便利である．

定理 *11.1*　A は $N \times N$ の実行列であり，K 個の実固有値 $\lambda_1, \cdots, \lambda_K$ をもつとする．このとき，A は，直交行列 O によって $A = OSO^{\mathrm{T}}$ の形に分解される．ここで，S は以下の構造をもつ．

(1) $j \le K$ かつ $l \le K$ のとき

$$S_{jl} = \begin{cases} R_{jl} = r_{jl}, & j < l, \\ \lambda_j, & j = l, \\ 0, & j > l \end{cases} \tag{11.1.3}$$

(2) $K < j \le M$ かつ $l \le K$ のとき

$$S_{jl} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{11.1.4}$$

(3) $j \le K$ かつ $K < l \le M$ のとき

$$S_{jl} = R_{jl} = \begin{bmatrix} r_{jl}^{(1)} & r_{jl}^{(2)} \end{bmatrix} \tag{11.1.5}$$

(4) $K < j \le M$ かつ $K < l \le M$ のとき

$$S_{jl} = \begin{cases} R_{jl} = \begin{bmatrix} r_{jl}^{(11)} & r_{jl}^{(12)} \\ r_{jl}^{(21)} & r_{jl}^{(22)} \end{bmatrix}, & j < l, \\ \begin{bmatrix} x_j & b_j \\ -c_j & x_j \end{bmatrix}, & j = l, \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, & j > l. \end{cases} \tag{11.1.6}$$

ただし，$M = (N+K)/2$ である．また，$r_{jl}, r_{jl}^{(n)}, r_{jl}^{(mn)}, \lambda_j, x_j, b_j, c_j$ は，すべて実数，$b_j c_j > 0, b_j \ge c_j$ である．

パラメータの数を調べると，λ_j が K 個，S_{jj} $(j > K)$ が $3(N-K)/2$ 個，R_{jl} が $N(N-1)/2 + (N-K)/2$ 個，O が $N(N-1)/2$ 個のパラメータをもち，総数は N^2 であり，行列 A のパラメータの数に等しい．この **定理** *11.1* を使うと，次の **定理** *11.2* を証明することができる．

定理 *11.2*　A は $N \times N$ 実行列で，**定理** *11.1* により $A = OSO^{\mathrm{T}}$ のように分解されるとする．このとき，変数変換のヤコビアンを考えると，

$$(\mathrm{d}A) = 2^{(N-K)/2} \prod_{j<l}^{M} \Delta_{jl} \prod_{j>K}^{M} (b_j - c_j) \prod_{j=1}^{K} \mathrm{d}\lambda_j \prod_{j>K}^{M} \mathrm{d}x_j \mathrm{d}b_j \mathrm{d}c_j$$
$$\times (\mathrm{d}R) \prod_{j<l}^{N} [O^{\mathrm{T}} \mathrm{d}O]_{jl} \tag{11.1.7}$$

のように書ける．ただし，Δ_{jl} は，$y_j = \sqrt{b_j c_j}$ に対して，

$$\Delta_{jl} = \begin{cases} |\lambda_j - \lambda_l|, & 1 \le j < l \le K, \\ (\lambda_j - x_l)^2 + y_l^2, & 1 \le j \le K < l \le M, \\ \bigl((x_j - x_l)^2 + (y_j - y_l)^2\bigr) & \\ \times \bigl((x_j - x_l)^2 + (y_j + y_l)^2\bigr), & K < j < l \le M \end{cases} \tag{11.1.8}$$

と定義される．また，$(\mathrm{d}R)$ は，R_{jl} の各要素の微分の積である．

<u>証明</u>　$A = OSO^{\mathrm{T}}$ より，

$$\mathrm{d}A = \mathrm{d}OSO^{\mathrm{T}} + OS\mathrm{d}O^{\mathrm{T}} + O\mathrm{d}SO^{\mathrm{T}} \tag{11.1.9}$$

である．左から O^{T}，右から O をかけると，

$$\mathrm{d}Y \equiv O^{\mathrm{T}}\mathrm{d}AO = O^{\mathrm{T}}\mathrm{d}OS + S\mathrm{d}O^{\mathrm{T}}O + \mathrm{d}S \tag{11.1.10}$$

を得る．ガウス型直交アンサンブルのときと同様の議論により，直交行列の行列式の絶対値が 1 であることから，

$$(\mathrm{d}Y) = (\mathrm{d}A) \tag{11.1.11}$$

が成り立つ．したがって，

$$\wedge \mathrm{d}Y = \bigwedge_{j>l} \wedge \mathrm{d}Y_{jl} \bigwedge_{j=l} \wedge \mathrm{d}Y_{jl} \bigwedge_{j<l} \wedge \mathrm{d}Y_{jl} \tag{11.1.12}$$

を計算すればよいことになる．ただし，S がブロック要素 S_{jl} に分けられているのと同様に，$\mathrm{d}Y$ もブロック要素 $\mathrm{d}Y_{jl}$ に分けられている．また，$\wedge A$ は，行列 A のすべての要素の外積を意味する．以下，それぞれの因子を計算していく．

$\bigwedge_{j>l} \wedge \mathrm{d}Y_{jl}$ の計算

まず，反対称行列 $O^{\mathrm{T}}\mathrm{d}O$ も，$\mathrm{d}Y$ と同様に，ブロック要素 $(O^{\mathrm{T}}\mathrm{d}O)_{jl}$ に分ける．j または l が k よりも大きいとき，このブロック要素は，(11.1.7)

の中に出てくる各要素 $[O^{\mathrm{T}}\mathrm{d}O]_{jl}$ とは異なることに注意してもらいたい．このとき，$j > l$ に対して計算すると，

$$\begin{aligned}\mathrm{d}Y_{jl} &= (O^{\mathrm{T}}\mathrm{d}O)_{jl}R_{ll} - R_{jj}(O^{\mathrm{T}}\mathrm{d}O)_{jl} \\ &+ \sum_{k<l}(O^{\mathrm{T}}\mathrm{d}O)_{jk}R_{kl} - \sum_{k>j}R_{jk}(O^{\mathrm{T}}\mathrm{d}O)_{kl}\end{aligned} \tag{11.1.13}$$

を得る．この微分の外積を計算すると，同じ微分の外積はゼロであることから，k についての和の形に書かれた項からの寄与はないことがわかる．したがって，

$$\bigwedge_{j>l}\wedge\mathrm{d}Y_{jl} = \bigwedge_{j>l}\wedge\left[(O^{\mathrm{T}}\mathrm{d}O)_{jl}R_{ll} - R_{jj}(O^{\mathrm{T}}\mathrm{d}O)_{jl}\right] \tag{11.1.14}$$

である．R_{jj} の要素の具体的な形を代入して計算すると，$\bigwedge_{j>l}\wedge\mathrm{d}Y_{jl}$ からヤコビアンへの寄与は，

$$\prod_{j>l}\Delta_{jl}\left((O^{\mathrm{T}}\mathrm{d}O)_{jl}\right) \tag{11.1.15}$$

になる．$\prod_{j>l}\left((O^{\mathrm{T}}\mathrm{d}O)_{jl}\right)$ は，$(O^{\mathrm{T}}\mathrm{d}O)_{jl}$ の各要素の積である．

$\bigwedge_{j=l}\wedge\mathrm{d}Y_{jl}$ の計算

すでに $(O^{\mathrm{T}}\mathrm{d}O)_{jl}$ $(j > l)$ の中に現れている微分は，ヤコビアンに寄与しない．これらの微分を含む項を，$\cdots$ と書くことにしよう．このとき，$j \le K$ ならば，

$$\wedge\mathrm{d}Y_{jj} = \mathrm{d}\lambda_j + \cdots \tag{11.1.16}$$

を得る．$j > K$ のときには，$(O^{\mathrm{T}}\mathrm{d}O)_{jj}$ がゼロではないため，より複雑であり，

$$\wedge\mathrm{d}Y_{jj} = \wedge(\mathrm{d}S_{jj} + (O^{\mathrm{T}}\mathrm{d}O)_{jj}S_{jj} - S_{jj}(O^{\mathrm{T}}\mathrm{d}O)_{jj}) + \cdots \tag{11.1.17}$$

のようになる．$O^{\mathrm{T}}\mathrm{d}O$ は反対称行列なので，

$$(O^{\mathrm{T}}\mathrm{d}O)_{jj} = \begin{bmatrix} 0 & \mathrm{d}h_j \\ -\mathrm{d}h_j & 0 \end{bmatrix} \tag{11.1.18}$$

と書くことができる．この形を代入し，S_{jj} の具体的な形を使って計算すると，$\bigwedge_{j=l} \wedge Y_{jj}$ からヤコビアンへの寄与は，

$$2^{(N-K)/2} \prod_{j=1}^{K} \mathrm{d}\lambda_j \prod_{j>K}^{M} (b_j - c_j) \mathrm{d}x_j \mathrm{d}b_j \mathrm{d}c_j \mathrm{d}h_j \tag{11.1.19}$$

である．

$\bigwedge_{j<l} \wedge \mathrm{d}Y_{jl}$ の計算

$j < l$ のときには，

$$\mathrm{d}Y_{jl} = \mathrm{d}R_{jl} + \cdots \tag{11.1.20}$$

なので簡単であり，$\bigwedge_{j<l} \wedge \mathrm{d}Y_{jl}$ からヤコビアンへの寄与は，$(\mathrm{d}R)$ になる．

（証明終）

これで，**定理** *11.2* が証明されたので，最初に挙げたガウス型分布関数

$$P(A)(\mathrm{d}A) = (2\pi)^{-N^2/2} \mathrm{e}^{-(1/2)\mathrm{Tr}A^{\mathrm{T}}A} \prod_{j=1}^{N} \prod_{l=1}^{N} \mathrm{d}A_{jl} \tag{11.1.21}$$

を考えよう．両辺を A について積分した結果が 1 になるように，規格化定数を定めてある．**定理** *11.2* を適用すると，

$$\begin{aligned} P(A)(\mathrm{d}A) = (2\pi)^{-N^2/2} 2^{(N-K)/2} \prod_{j<l}^{M} \Delta_{jl} \prod_{j=1}^{K} \mathrm{e}^{-(1/2)\lambda_j^2} \mathrm{d}\lambda_j \\ \times \prod_{j>K}^{M} (b_j - c_j) \mathrm{e}^{-x_j^2 - (1/2)(b_j^2 + c_j^2)} (\mathrm{d}x_j \mathrm{d}b_j \mathrm{d}c_j) \\ \times \mathrm{e}^{-(1/2)\mathrm{Tr}R^{\mathrm{T}}R} (\mathrm{d}R) \prod_{j<l}^{N} [O^{\mathrm{T}} \mathrm{d}O]_{jl} \end{aligned} \tag{11.1.22}$$

となる．固有値の確率分布関数を得るために，それ以外の変数についての積分を行う．まず，R についての積分は，独立なガウス積分の積なので簡単で，

$$\int \mathrm{e}^{-(1/2)\mathrm{Tr}R^{\mathrm{T}}R} (\mathrm{d}R) = (2\pi)^{N(N-2)/4 + K/4} \tag{11.1.23}$$

になる．次に，直交行列 O に対する積分は，以前に評価した積分 I_n の値 (3.2.14) を使って，

$$\int \prod_{j<l}^{N} [O^{\mathrm{T}} \mathrm{d}O]_{jl} = \prod_{n=1}^{N} I_n = \frac{\pi^{N(N+1)/4}}{\prod_{n=1}^{N} \Gamma(n/2)} \tag{11.1.24}$$

のように計算できる．また，b_j および c_j についての積分は，$b_j, c_j > 0$ のとき，$y_j = \sqrt{b_j c_j}$ と $v_j = b_j - c_j$ への変数変換を行うと，

$$(b_j - c_j)\mathrm{e}^{-(1/2)(b_j^2 + c_j^2)} \mathrm{d}b_j \mathrm{d}c_j = \mathrm{e}^{-(1/2)(v_j^2 + 2y_j^2)} \frac{2v_j y_j}{\sqrt{v_j^2 + 4y_j^2}} \mathrm{d}y_j \mathrm{d}v_j \tag{11.1.25}$$

になるので，v_j についての積分をとると，

$$2y_j \mathrm{e}^{-y_j^2} \int_0^{\infty} \mathrm{d}v_j \mathrm{e}^{-(1/2)v_j^2} \frac{v_j}{\sqrt{v_j^2 + 4y_j^2}} = \sqrt{2\pi} y_j \mathrm{e}^{y_j^2} \mathrm{erfc}(\sqrt{2} y_j) \tag{11.1.26}$$

を得る．ただし，

$$\mathrm{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t \tag{11.1.27}$$

である．$b_j, c_j < 0$ のときにも，同様の結果が得られる．

以上の結果をまとめると，固有値の確率分布関数は，

$$\begin{aligned} & P_K(\lambda_1, \cdots, \lambda_K; x_1, \cdots, x_{(N-K)/2}; y_1, \cdots, y_{(N-K)/2}) \mathrm{d}Z \\ & = C \frac{2^{N(3-N)/4-K}}{\prod_{n=1}^{N} \Gamma(n/2)} \prod_{j<l}^{M} \Delta_{jl} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{K} \lambda_j^2 + \sum_{j=1}^{(N-K)/2} (y_j^2 - x_j^2) \right\} \\ & \times \prod_{j=1}^{(N-K)/2} y_j \mathrm{erfc}(\sqrt{2} y_j) \mathrm{d}Z \end{aligned} \tag{11.1.28}$$

で与えられる [37, 80]．ただし，$\lambda_1, \cdots, \lambda_K$ が K 個の実固有値，$x_1 \pm iy_1, \cdots, x_{(N-K)/2} \pm iy_{(N-K)/2}$ が $(N-K)/2$ 個の複素固有値対になる．また，測度 $\mathrm{d}Z$ は，

$$\mathrm{d}Z = \mathrm{d}\lambda_1 \cdots \mathrm{d}\lambda_K \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_{(N-K)/2} \mathrm{d}y_1 \cdots \mathrm{d}y_{(N-K)/2} \tag{11.1.29}$$

である．因子 C は，固有値の並ぶ順番を無視して積分する場合には，

$$C = \frac{1}{K!((N-K)/2)!} \tag{11.1.30}$$

とする．このように規格化定数を定めることにより，すべての積分変数について積分した結果

$$p_K = \int P_K(\lambda_1, \cdots, \lambda_K; x_1, \cdots, x_{(N-K)/2}; y_1, \cdots, y_{(N-K)/2}) \mathrm{d}Z \tag{11.1.31}$$

は，固有値のうち K 個が実数になる確率になる．実ランダム行列のガウス型アンサンブルにおいては，固有値分布が，複素平面上で等方的にならない．固有値が実数になる確率が，行列の大きさ N が有限のときには，有限の値をもつのである．

簡単な例として，p_N，すなわちすべての固有値が実数になる確率を計算してみよう．このときには，

$$P_N(\lambda_1, \cdots, \lambda_N) = \frac{2^{-N(N+1)/4}}{N! \prod_{n=1}^{N} \Gamma(n/2)} \mathrm{e}^{-(1/2)\sum_{j=1}^{N} \lambda_j^2} \prod_{j<l}^{N} |\lambda_j - \lambda_l| \tag{11.1.32}$$

となるが，これは，ガウス型直交アンサンブルの固有値分布と同じ形をしているので，(6.3.65) を使って積分できる．歪直交多項式の規格化定数 $r_n(0)$ は，(7.1.20) によって与えられているので，N が偶数のときには，これを使って，

$$\begin{aligned} p_N &= \int \cdots \int \mathrm{d}\lambda_1 \cdots \mathrm{d}\lambda_N P_N(\lambda_1, \cdots, \lambda_N) \\ &= \frac{2^{-N(N+1)/4}}{\prod_{n=1}^{N} \Gamma(n/2)} \prod_{n=0}^{(N/2)-1} r_n(0) \\ &= \frac{2^{-N(N+1)/4}}{\prod_{n=1}^{N} \Gamma(n/2)} \prod_{n=0}^{(N/2)-1} \left\{ 2^{-2n+1} \sqrt{\pi}\, \Gamma(2n+1) \right\} \\ &= 2^{-N(N-1)/4} \end{aligned} \tag{11.1.33}$$

となる．N が奇数のときには，(6.3.50) で定義される

$$\begin{aligned} s_{N-1} &= \int g(x,y;0)R_{N-1}(x;0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2^{N-1}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}H_{N-1}(x)\mathrm{d}x \\ &= \sqrt{2\pi}\frac{(N-1)!}{2^{N-1}((N-1)/2)!} \end{aligned} \tag{11.1.34}$$

が必要である．これを使って計算すると，

$$\begin{aligned} p_N &= \frac{2^{-N(N+1)/4}}{\prod_{n=1}^{N}\Gamma(n/2)} s_{N-1} \prod_{n=0}^{(N-3)/2} r_n(0) \\ &= \frac{2^{-N(N+1)/4}}{\prod_{n=1}^{N}\Gamma(n/2)} \frac{\sqrt{2\pi}(N-1)!}{2^{N-1}((N-1)/2)!} \prod_{n=0}^{(N-3)/2} \left\{2^{-2n+1}\sqrt{\pi}\,\Gamma(2n+1)\right\} \\ &= 2^{-N(N-1)/4} \end{aligned} \tag{11.1.35}$$

を得る．こうして，N が偶数のときも奇数のときも，確率 $p_N = 2^{-N(N-1)/4}$ で，すべての固有値が実数になることがわかる．

Edelman は，さらに進んで，複素固有値の密度を評価している [37]．まず，固有値の確率分布関数と複素固有値密度の関係を説明しよう．固有値の確率分布関数 P_K において，すべての実固有値変数を積分し，複素固有値対変数を (x,y) 1 つを除いて積分した量 $\Pi_K(x,y)$ を考える．このとき，$\Pi_K(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ は，実固有値数が K 個という条件の下で，複素固有値対の一方が複素上半面の無限小面積 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ の中にある確率を与える．したがって，複素固有値密度，すなわち複素固有値対の数の平均は，

$$\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sum_{K}^{N} \frac{N-K}{2}\Pi_K(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{11.1.36}$$

によって与えられる．Edelman の解は，このような多重積分と和の直接評価ではなく，別の方法（行列 A の不完全分解）によっているが，その結果は，

$$\rho(x,y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}y\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{erfc}(\sqrt{2}y)\mathrm{e}_{N-2}(x^2+y^2) \tag{11.1.37}$$

である．ただし，

$$\mathrm{e}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \tag{11.1.38}$$

と定義する．

関数 $\mathrm{e}_n(x)$ に対しては，次の **予備定理** *11.1* が成立する．

予備定理 *11.1*　z を複素数とするとき，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathrm{e}_n(nz)}{\mathrm{e}^{nz}} = \begin{cases} 1, & 0 \le |z| < 1, \\ 0, & |z| > 1 \end{cases} \tag{11.1.39}$$

である．

ここで，スケーリング変数 X, Y を

$$X = \frac{x}{\sqrt{N}}, \quad Y = \frac{y}{\sqrt{N}} \tag{11.1.40}$$

によって導入すると，**予備定理** *11.1* により，$N \to \infty$ においては，

$$\rho(x,y) \sim \begin{cases} 1/\pi, & X^2 + Y^2 < 1, \\ 0, & X^2 + Y^2 > 1 \end{cases} \tag{11.1.41}$$

が示される．すなわち，$N \to \infty$ において，複素固有値は，円形の複素平面領域内で一様分布する．これは，より一般の実ランダム行列においても普遍的に成立することが期待され，円則と呼ばれる．

最後に，複素固有値数の期待値は，

$$E_c = \sum_{K}^{N} (N-K) p_K = 2\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \int_0^{\infty} \mathrm{d}y \rho(x,y) \tag{11.1.42}$$

で与えられることに着目しよう．$N \to \infty$ では，複素固有値密度 $\rho(x,y)$ の漸近形 (11.1.41) を使うと，

$$\begin{aligned} E_c &= 2N \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}X \int_0^{\infty} \mathrm{d}Y \rho(\sqrt{N}X, \sqrt{N}Y) \\ &\sim N \end{aligned} \tag{11.1.43}$$

になる．すなわち，$N \to \infty$ では，ほとんどすべての固有値が，複素固有値になる．

11.2　複素ランダム行列

A は $N \times N$ 複素行列であるとし，その要素 A_{jl} を実部 A_{jl}^R と虚部 A_{jl}^I の線形結合として，

$$A_{jl} = A_{jl}^R + iA_{jl}^I \tag{11.2.1}$$

のように書く．このとき，確率分布関数

$$P(A)(\mathrm{d}A) \propto \mathrm{e}^{-\mathrm{Tr}A^\dagger A} \prod_{j=1}^{N} \prod_{l=1}^{N} \mathrm{d}A_{jl}^R \mathrm{d}A_{jl}^I \tag{11.2.2}$$

によって，一般の複素行列の場合のガウス型アンサンブル（Ginibre アンサンブル）を定義することができる [53]. Ginibre アンサンブルにおいては，すべての行列要素の実部と虚部が，独立にガウス分布している．

複素行列 A を非特異行列 X によって対角化して，

$$A = XEX^{-1} \tag{11.2.3}$$

と書く．X はユニタリ行列ではなく，対角行列 E の対角要素 $z_1, z_2, \cdots, z_N$ は複素数である．実行列のときと同様，Tr $A^\dagger A$ は，非特異行列 X に依存している．すなわち，すべての要素の実部と虚部を独立にガウス分布させたときに，相似変換 $A \to XAX^{-1}$ の下で，アンサンブルが不変にならない．そこで，固有値の分布関数を得るためには，次の分解を使うと便利である．

定理 *11.3*　A は $N \times N$ の複素行列であるとする．このとき，$N \times N$ ユニタリ行列 U が存在し，A を $A = UTU^\dagger$ の形に分解することができる．ここで，T は複素三角行列（すなわち $j > l$ のとき $T_{jl} = 0$）で，その対角要素 $z_1, z_2, \cdots, z_N$ は A の固有値になる．

パラメータの数を調べると，T が $(N+1)N$ 個，U が N^2 個のパラメータをもち，総数は $2N^2+N$ であり，行列 A のパラメータ数 $2N^2$ を超える．したがって，この分解は唯一でなく，V をユニタリ対角行列として，

$$U \mapsto UV \tag{11.2.4}$$

の置き換えを行っても成立する．したがって，分解を唯一にするためには，ユニタリ対角行列のパラメータ数 N に等しいだけの数の拘束条件を課す必要がある．

定理 *11.3* を使うと，次の **定理** *11.4* を証明することができる．

定理 *11.4*　A は $N \times N$ 複素行列で，**定理** *11.3* により，$A = UTU^\dagger$ のように分解されているとする．このとき，変数変換のヤコビアンは，

$$(\mathrm{d}A) = \prod_{j<l} |z_j - z_l|^2 \prod_{j=1}^{N} \mathrm{d}z_j^R \mathrm{d}z_j^I \prod_{j<l}^{N} \mathrm{d}T_{jl}^R \mathrm{d}T_{jl}^I [U^\dagger \mathrm{d}U]_{jl}^R [U^\dagger \mathrm{d}U]_{jl}^I \tag{11.2.5}$$

になる．

証明　$A = UTU^\dagger$ より，

$$\mathrm{d}A = \mathrm{d}UTT^\dagger + UT\mathrm{d}U^\dagger + U\mathrm{d}TU^\dagger \tag{11.2.6}$$

である．左から $U^\dagger$，右から U をかけると，

$$\mathrm{d}Y \equiv U^\dagger \mathrm{d}AU = U^\dagger \mathrm{d}UT + T\mathrm{d}U^\dagger U + \mathrm{d}T \tag{11.2.7}$$

を得る．ここで，行列 $U^\dagger \mathrm{d}U$ は，ユニタリ行列の性質 $U^\dagger U = I$ より反エルミート行列になり，その対角要素は純虚数である．そこで，それらの対角要素をゼロとおくことにより，**定理** *11.3* の分解を唯一にしよう．すなわち，

$$[U^\dagger \mathrm{d}U]_{jj} = -[U\mathrm{d}U^\dagger]_{jj} = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, N \tag{11.2.8}$$

とする．また，ガウス型ユニタリアンサンブルに対する議論において示したように，ユニタリ行列の行列式の絶対値は 1 なので，

$$(\mathrm{d}Y) = (U^\dagger \mathrm{d}AU) \tag{11.2.9}$$

が成り立つ．つまり，外積

$$\wedge \mathrm{d}Y = \bigwedge_{j>l} \mathrm{d}Y_{jl} \bigwedge_{j=l} \mathrm{d}Y_{jl} \bigwedge_{j<l} \mathrm{d}Y_{jl} \tag{11.2.10}$$

を考えればよい．以下，それぞれの因子を計算する．

$\bigwedge_{j>l} \mathrm{d}Y_{jl}$ の計算

$j > l$ に対して計算すると，

$$\begin{aligned} \mathrm{d}Y_{jl} &= (U^{\mathrm{T}}\mathrm{d}U)_{jl}T_{ll} - T_{jj}(T^{\dagger}\mathrm{d}U)_{jl} \\ &+ \sum_{k<l}(U^{\dagger}\mathrm{d}U)_{jk}T_{kl} - \sum_{k>j} T_{jk}(U^{\dagger}\mathrm{d}U)_{kl} \end{aligned} \tag{11.2.11}$$

を得る．この微分の外積を計算すると，同じ微分の外積はゼロであることから，k についての和の形に書かれた項からの寄与はないことがわかる．したがって，

$$\bigwedge_{j>l} \mathrm{d}Y_{jl} = \bigwedge_{j>l} \left[[U^{\dagger}\mathrm{d}U]_{jl}T_{ll} - T_{jj}[U^{\dagger}\mathrm{d}U]_{jl}\right] \tag{11.2.12}$$

である．$T_{jj} = z_j$ に注意して計算すると，$\bigwedge_{j>l} \mathrm{d}Y_{jl}$ からヤコビアンへの寄与は，

$$\prod_{j>l}^{N} |z_j - z_l|^2 [U^{\dagger}\mathrm{d}U]^R_{jl} [U^{\dagger}\mathrm{d}U]^I_{jl} \tag{11.2.13}$$

になる．

$\bigwedge_{j=l} \mathrm{d}Y_{jl}$ の計算

すでに $[U^{\mathrm{T}}\mathrm{d}U]_{jl}$ $(j > l)$ の中に現れている微分からは，ヤコビアンへの寄与がない．これらの微分を含む項を $\cdots$ で書くと，拘束条件 (11.2.8) を使って，

$$\mathrm{d}Y_{jj} = \mathrm{d}z_j + \cdots \tag{11.2.14}$$

を得る．したがって，$\bigwedge_{j=l} Y_{jj}$ からヤコビアンへの寄与は，

$$\prod_{j=1}^{N} \mathrm{d}z_j^R \mathrm{d}z_j^I \tag{11.2.15}$$

となる．

$\bigwedge_{j<l} \mathrm{d}Y_{jl}$ の計算

$j < l$ のときには，

$$\mathrm{d}Y_{jl} = \mathrm{d}T_{jl} + \cdots \tag{11.2.16}$$

なので，$\bigwedge_{j<l} \mathrm{d}Y_{jl}$ からヤコビアンへの寄与は，$\prod_{j<l}^{N} \mathrm{d}T_{jl}^R \mathrm{d}T_{jl}^I$ になる．

（証明終）

最初に挙げたガウス型分布関数 (11.2.2) に対して**定理** *11.4* を適用すると，

$$\begin{aligned} P(A)(\mathrm{d}A) \propto & \prod_{j<l}^{N} |z_j - z_l|^2 \prod_{j=1}^{N} \mathrm{e}^{-(1/2)|z_j|^2} \mathrm{d}z_j^R \mathrm{d}z_j^I \\ & \times \prod_{j<l}^{N} \mathrm{e}^{-(1/2)|T_{jl}|^2} \mathrm{d}T_{jl}^R \mathrm{d}T_{jl}^I [U^\dagger \mathrm{d}U]_{jl}^R [U^\dagger \mathrm{d}U]_{jl}^I \end{aligned} \tag{11.2.17}$$

を得る．固有ベクトルに関係する変数についての積分を先に行うと，固有値の確率分布関数は，

$$P(z_1, \cdots, z_N) \prod_{j=1}^{N} \mathrm{d}z_j^R \mathrm{d}z_j^I \propto \prod_{j=1}^{N} \mathrm{e}^{-|z_j|^2} \prod_{j<l}^{N} |z_j - z_l|^2 \prod_{j=1}^{N} \mathrm{d}z_j^R \mathrm{d}z_j^I \tag{11.2.18}$$

となる．こうして，実行列のときと同様に，しかしはるかに簡単に，固有値の確率分布関数を求めることができた．実行列の場合と異なり，固有値の分布関数は，複素平面上において（原点から見たとき）等方的であり，固有値が実数になる確率は，有限の N に対してもゼロである．

Ginibre アンサンブルは，統計力学においては，2 次元クーロン気体の特別な場合になる．相互作用している 2 次元気体であるにも関わらず，(以下に

述べるように）すべての相関関数が厳密に計算できる珍しい例である．相関関数の定義は，第 6 章と同様に，

$$\rho(z_1, \cdots, z_k) = \frac{1}{C_N}\frac{N!}{(N-k)!}\int\cdots\int \mathrm{d}z_{k+1}\cdots\mathrm{d}z_N P(z_1, \cdots, z_N) \tag{11.2.19}$$

となる．ただし，積分は，

$$\int \mathrm{d}z_n = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}z_n^R \mathrm{d}z_n^I \tag{11.2.20}$$

のように定義され，また，

$$C_N = \int\cdots\int \mathrm{d}z_1\cdots\mathrm{d}z_N P(z_1, \cdots, z_N) \tag{11.2.21}$$

である．ここで，

$$I_n(z_1, \cdots, z_n) = \det\left[f(z_j, z_l)\right]_{j,l=1,2,\cdots,n} \tag{11.2.22}$$

を関数

$$f(z, w) = \mathrm{e}^{-(|z|^2+|w|^2)/2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{h_{n-1}}z^{n-1}(w^*)^{n-1}, \quad h_n = \pi n! \tag{11.2.23}$$

を使って定義すると，

$$P(z_1, \cdots, z_N) \propto \prod_{j=1}^{N} h_j I_N(z_1, \cdots, z_N) \tag{11.2.24}$$

となる．関数 $f(z, w)$ については， 直交関係

$$\int \mathrm{d}z \mathrm{e}^{-|z|^2} z^m (z^*)^n = h_n \delta_{mn} \tag{11.2.25}$$

より，容易に，

$$\int \mathrm{d}u f(z, u) f(u, w) = f(z, w) \tag{11.2.26}$$

を証明できる．したがって，6.1 節と同様の議論により，

$$I_{n-1}(z_1,\cdots,z_{n-1})=(N-n+1)\int \mathrm{d}z_n I(z_1,\cdots,z_n) \tag{11.2.27}$$

を得る．これを漸化関係として使うと，相関関数の行列式表示

$$\rho(z_1,\cdots,z_k)=\det[f(z_j,z_l)]_{j,l=1,2,\cdots,k} \tag{11.2.28}$$

を導くことができる．

相関関数の漸近形は，$f(x,y)$ の漸近形を計算することにより求めることができる．たとえば，1 体相関関数 $\rho(z)$ は固有値密度を与える．これを，z の実部 x と 虚部 y を使って書く．すなわち，

$$\rho(z)=\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\sum_{n=0}^{N-1}\frac{1}{\pi n!}(x^2+y^2)^n=\frac{1}{\pi}\frac{\mathrm{e}_{N-1}(x^2+y^2)}{\mathrm{e}^{x^2+y^2}} \tag{11.2.29}$$

である．このとき，スケーリング変数 X,Y を，

$$X=\frac{x}{\sqrt{N-1}},\quad Y=\frac{y}{\sqrt{N-1}} \tag{11.2.30}$$

によって導入すると，**予備定理** *11.1* により，$N\to\infty$ においては，

$$\rho(z)\sim\begin{cases}1/\pi, & X^2+Y^2<1,\\ 0, & X^2+Y^2>1\end{cases} \tag{11.2.31}$$

が示される．すなわち，$N\to\infty$ において，複素固有値は円形の複素平面領域内で一様分布する．したがって，複素ランダム行列においても，円則が成立することが示された．また，円の範囲内 $(X^2+Y^2<1)$ において，$N\to\infty$ では，**予備定理** *11.1* によって，

$$\begin{aligned}f(z_1,z_2)&=\mathrm{e}^{-(|z_1|^2+|z_2|^2)/2}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\pi(n-1)!}z_1^{n-1}(z_2^*)^{n-1}\\&\sim\frac{1}{\pi}\exp\left\{-\frac{1}{2}(|z_1|^2+|z_2|^2)+z_1z_2^*\right\}\end{aligned} \tag{11.2.32}$$

の関係がある．これから，任意次数の相関関数が，複素平面上での固有値間の距離だけに依存する漸近形をもつことがわかる．とくに，2 体相関関数の漸近形は，

$$\rho(z_1, z_2) \sim \frac{1}{\pi^2}\left\{1 - \mathrm{e}^{-|z_1 - z_2|^2}\right\} \tag{11.2.33}$$

になる．

章末問題

[1] **予備定理** *11.1* を証明せよ（ヒント：不等式

$$\left|\sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{z^j}{j!}\right| \leq \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{|z|^j}{(n+2)^j}, \quad |z| < n,$$

$$\left|\sum_{j=0}^{n} \frac{z^j}{j!}\right| \leq \frac{|z|^n}{n!}\sum_{j=0}^{n} \frac{n^j}{|z|^j}, \qquad |z| > n$$

に着目する）．

[2] (11.2.32) によって与えられる k 体相関関数の漸近形は，任意の $k \geq 2$ に対して，複素平面上での固有値間の距離だけに依存することを証明せよ（ヒント：平面上の距離を保存する変換は，並進（$z \mapsto z + a$, a は複素数），回転（$z \mapsto z\mathrm{e}^{i\theta}$, θ は実数），鏡像（$z \mapsto z^*$）に分類される．それぞれの変換を k 個の固有値に一斉に施したとき，相関関数の行列式表示がどうなるかを考える）．

参考文献

[1] M. Adler, P.J. Forrester, T. Nagao and P. van Moerbeke, *J. Stat. Phys.* **99** (2000) 141.
[2] E. Akkermans, G. Montambaux, J.-L. Pichard and J. Zinn-Justin (editors), *Mesoscopic Quantum Physics, Les Houches Session LXI* (Elsevier, 1995).
[3] A. Altland and A. Kamenev, *Phys. Rev. Lett.* **85** (2000) 5615.
[4] A. Altland and M.R. Zirnbauer, *Phys. Rev. Lett.* **76** (1996) 3420; *Phys. Rev.* **B55** (1997) 1142, preprint(cond-mat/9602137) version 2 (2001).
[5] T.W. Anderson, *An Introduction to Multivariate Statistical Analysis* (John Wiley & Sons, 1984).
[6] 安藤洋美,『多変量解析の歴史』(現代数学社, 1997).
[7] H. Aslaksen, *The Mathematical Intelligencer* **18** (1996) 57.
[8] J. Baik, P. Deift and K. Johansson, *J. Amer. Math. Soc.* **12** (1999) 1119.
[9] G. Berkolaiko, H. Schanz and R.S. Whitney, *Phys. Rev. Lett.* **88** (2002) 104101.
[10] M.V. Berry, *Proc. Royal Soc. London* **A400** (1985) 229.
[11] P. Bleher and A. Its, *Ann. Math.* **150** (1999) 185.
[12] O. Bohigas, M.J. Giannoni and C. Schmit, *Phys. Rev. Lett.* **52** (1984) 1.
[13] O. Bohigas, R.U. Haq and A. Pandey, *Phys. Rev. Lett.* **54** (1985) 1645.
[14] J.-P. Bouchaud and M. Potters, *Theory of Financial Risks: From Statistical Physics to Risk Management* (Cambridge University Press, 2000) [邦訳:『金融リスクの理論—経済物理からのアプローチ』森平爽一郎監修, 森谷博之, 熊谷善彰訳 (朝倉書店, 2003)].
[15] M.J. Bowick and E. Brézin, *Phys. Lett.* **B268** (1991) 21.
[16] E. Brézin, C. Itzykson, G. Parisi and J. Zuber, *Comm. Math. Phys.* **59** (1978) 35.
[17] E. Brézin and S. Hikami, *Nucl. Phys.* **B479** (1996) 697; *Phys. Rev.* **E55** (1997) 4067; **E56** (1997) 264.
[18] E. Brézin and A. Zee, *Nucl. Phys.* **B402** (1993) 613.
[19] T.A. Brody, J. Flores, J.B. French, P.A. Mello, A. Pandey and S.S.M. Wong, *Rev. Mod. Phys.* **53** (1981) 385.
[20] N.G. de Bruijn, *J. Indian Math. Soc.* **19** (1955) 133.
[21] N.G. de Bruijn, *Asymptotic Methods in Analysis* (Dover, 1981).
[22] F. Calogero, *J. Math. Phys.* **12** (1971) 419.
[23] M. Caselle, A New Classification Scheme for Random Matrix Theories, preprint(cond-mat/9610017).
[24] J.T. Chalker and B. Mehlig, *Phys. Rev. Lett.* **81** (1998) 3367.
[25] A. Crisanti, G. Paladin and A. Vulpiani, *Products of Random Matrices in Statistical Physics* (Springer-Verlag, 1993).
[26] P. Deift, *Orthogonal Polynomials and Random Matrices* (American Mathematical Society, 2000).
[27] J. Derbyshire, *Prime Obsession: Bernhard Riemann and the Greatest Unsolved*

Problem in Mathematics (Joseph Henry Pr., 2003) [邦訳：『素数に憑かれた人たち』松浦俊輔訳（日経 BP 社，2004)].
[28] P. DiFrancesco, P. Ginsparg and J. Zinn-Justin, *Phys. Rep.* **254** (1995) 1.
[29] F.J. Dyson, *J. Math. Phys.* **3** (1962) 140; 157; 166.
[30] F.J. Dyson, *J. Math. Phys.* **3** (1962) 1191.
[31] F.J. Dyson, *J. Math. Phys.* **3** (1962) 1199.
[32] F.J. Dyson, *Comm. Math. Phys.* **19** (1970) 235.
[33] F.J. Dyson, *J. Math. Phys.* **13** (1972) 90.
[34] F.J. Dyson, *Helv. Phys. Acta* **45** (1972) 289.
[35] F.J. Dyson, *Selected Papers of Freeman Dyson and Commentary* (American Mathematical Society, 1996).
[36] F.J. Dyson and M.L. Mehta, *J. Math. Phys.* **4** (1963) 701.
[37] A. Edelman, *J. Multivariate Analysis* **60** (1997) 203.
[38] S.F. Edwards and P.W. Anderson, *J. Phys.* **F5** (1975) 965.
[39] K. Efetov, *Adv. Phys.* **32** (1983) 53.
[40] K. Efetov, *Supersymmetry in Disorder and Chaos* (Cambridge University Press, 1997).
[41] K. Efetov, *Phys. Rev. Lett.* **79** (1997) 491; *Phys. Rev.* **B56** (1997) 9630.
[42] A. Erdélyi (editor), *Tables of Integral Tranforms* Vol. II (McGraw-Hill, 1954).
[43] P.J. Forrester, *Phys. Lett.* **A179** (1993) 127.
[44] P.J. Forrester, *Nucl. Phys.* **B402** (1993) 709.
[45] P.J. Forrester, *Nucl. Phys.* **B416** (1994) 377.
[46] P.J. Forrester and T. Nagao, *J. Stat. Phys.* **89** (1997) 69.
[47] P.J. Forrester and T. Nagao, *Nucl. Phys.* **B532** (1998) 733.
[48] P.J. Forrester, T. Nagao and G. Honner, *Nucl. Phys.* **B553** (1999) 601.
[49] K. Frahm and J.-L. Pichard, *J. Phys. I France* **5** (1995) 847; 877.
[50] 藤原雅彦，『天才の栄光と挫折　数学者列伝』（新潮社，2002).
[51] S. Galluccio, J.-P. Bouchaud and M. Potters, *Physica* **A259** (1998) 449.
[52] M.J. Gianonni, A. Voros and J. Zinn-Justin (editors), *Chaos and Quantum Physics, Les Houches Session LII* (Elsevier, 1990).
[53] J. Ginibre, *J. Math. Phys.* **6** (1965) 440.
[54] V.L. Girko, *Theory of Random Determinants* (Kluwer Academic Press, 1990).
[55] T. Guhr, A. Müller-Groeling and H.A. Weidenmüller, *Phys. Rep.* **299** (1998) 189.
[56] T. Guhr and T. Wettig, *J. Math. Phys.* **37** (1996) 6395.
[57] Z.N.C. Ha, *Phys. Rev. Lett.* **73** (1994) 1574; *Nucl. Phys.* **B435** (1995) 604; *Quantum Many-Body Systems in One Dimension* (World Scientific, 1996).
[58] F. Haake, *Quantum Signatures of Chaos* (2nd edition, Springer-Verlag, 2001).
[59] F. Haake, F. Izrailev, N. Lehmann, D. Saher and H.J. Sommers, *Zeit. Phys.* **B88** (1992) 359.
[60] G. Hackenbroich and H.A. Weidenmüller, *Phys. Rev. Lett.* **74** (1995) 4118.
[61] R.U. Haq, A. Pandey and O. Bohigas, *Phys. Rev. Lett.* **48** (1982) 1086.
[62] Harish Chandra, *Amer. J. Math.* **79** (1957) 87.
[63] N. Hatano and D.R. Nelson, *Phys. Rev. Lett.* **77** (1996) 570; *Phys. Rev.* **B56** (1997) 8651.
[64] Y. Imry, *Introduction to Mesoscopic Physics* (2nd edition, Oxford University Press, 2002) [1st edition の邦訳：『メソスコピック物理入門』樺沢宇紀訳（吉岡書店，2000)].

[65] C. Itzykson and J.-M. Drouffe, *Statistical Field Theory* (Cambridge University Press, 1989).
[66] C. Itzykson and J.-B. Zuber, *J. Math. Phys.* **21** (1980) 411.
[67] 井関知辰，「算法発揮」(1690) [解説：田崎中，『江戸時代の数学』(総合科学出版, 1983)].
[68] A.D. Jackson, M.K. Şener and J.J.M. Verbaarschot, *Phys. Lett.* **B387** (1996) 355.
[69] 神保道夫，『ホロノミック量子場』(岩波書店，1998).
[70] M. Jimbo, T. Miwa, Y. Mori and M. Sato, *Jpn. Acad. Ser. A, Math. Sci.* **55** (1979) 317; *Physica* **D1** (1980) 80.
[71] K. Johansson, *Comm. Math. Phys.* **209** (2000) 437.
[72] K. Johansson, *Comm. Math. Phys.* **215** (2001) 683.
[73] 筧三郎，京都大学数理解析研究所講究録 **1221** (2001) 199.
[74] A. Kamenev and M. Mezard, *J. Phys.* **A32** (1999) 4373; *Phys. Rev.* **B60** (1999) 3944.
[75] L.V. Keldysh, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **47** (1964) 1515; *Sov. Phys. JETP* **20** (1965) 1018.
[76] 小山信也，日本物理学会誌 **59** (2004) 436.
[77] M. Krbálek and P. Šeba, *J. Phys.* **A33** (2000) L229.
[78] L. Laloux, P. Cizeau, J.-P. Bouchaud and M. Potters, *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 1467.
[79] H.C. Lee, *Proc. Roy. Irish Acad.* **52** Sect. A (1949) 253.
[80] N. Lehmann and H.-J. Sommers, *Phys. Rev. Lett.* **67** (1991) 941.
[81] R. May, *Nature* **238** (1972) 412.
[82] B. Mehlig and J.T. Chalker, *J. Math. Phys.* **41** (2000) 3233.
[83] M.L. Mehta, *Matrix Theory* (Les Editions de Physique, 1989).
[84] M.L. Mehta, *Random Matrices* (2nd edition, Academic Press, 1990).
[85] M.L. Mehta and F.J. Dyson, *J. Math. Phys.* **4** (1963) 713.
[86] M.L. Mehta and M. Gaudin, *Nucl. Phys.* **18** (1960) 420.
[87] M.L. Mehta and A. Pandey, *J. Phys.* **A16** (1983) 2655.
[88] A. Mirlin and Y. Fyodorov *J. Phys.* **A24** (1991) 2219; 2273.
[89] H.L. Montgomery, *Proc. Symp. Pure Math.* **24** (1973) 181.
[90] E.H. Moore, *Bull. Amer. Math. Soc.* **28** (1922) 161.
[91] E.H. Moore and R.W. Barnard, *General Analysis* (Memoirs of the American Philosophical Society, Philadelphia, 1935).
[92] R. J. Muirhead, *Aspects of Multivariate Statistical Theory* (John Wiley & Sons, 1982).
[93] S. Müller, S. Heusler, P. Braun, F. Haake and A. Altland, *Phys. Rev. Lett.* **93** (2004) 014103.
[94] T. Nagao, *Nucl. Phys.* **B602** (2001) 622.
[95] T. Nagao and P.J. Forrester, *Nucl. Phys.* **B435** (1995) 401.
[96] T. Nagao and P.J. Forrester, *Nucl. Phys.* **B563** (1999) 547.
[97] T. Nagao and P.J. Forrester, *Nucl. Phys.* **B660** (2003) 557.
[98] T. Nagao, M. Katori and H. Tanemura, *Phys. Lett.* **A307** (2003) 29.
[99] T. Nagao and K. Saito, *Phys. Lett.* **A311** (2003) 353.
[100] T. Nagao and T. Sasamoto, *Nucl. Phys.* **B699** (2004) 487.
[101] T. Nagao and K. Slevin, *J. Math. Phys.* **34** (1993) 2075.
[102] T. Nagao and K. Slevin, *J. Math. Phys.* **34** (1993) 2317.

[103] T. Nagao and M. Wadati, *J. Phys. Soc. Jpn.* **60** (1991) 3298; **61** (1992) 78; **61** (1992) 1910.
[104] S.M. Nishigaki and A. Kamenev, *J. Phys.* **A35** (2002) 4571.
[105] A.M. Odlyzko, *Math. Comput.* **48** (1987) 273; *Contemporary Math. Series* (American Mathematical Society) **290** (2001) 139.
[106] 岡本和夫,『パンルヴェ方程式序説』(上智大学数学講究録 **19**, 1985).
[107] M.A. Olshanetsky and A.M. Perelomov, *Phys. Rep.* **71** (1981) 313; **94** (1983) 313.
[108] A. Pandey, *Ann. Phys.* **119** (1979) 170.
[109] A. Pandey and M.L. Mehta, *Comm. Math. Phys.* **87** (1983) 449.
[110] L. Pastur, *Mathematical Physics 2000* (Imperial College Press, 2000) 216.
[111] V. Plerou, P. Gopikrishnan, B. Rosenow, L. Nunes Amaral and H. Stanley, *Phys. Rev. Lett.* **83** (1999) 1471.
[112] C.E. Porter (editor), *Statistical Theory of Spectra: Fluctuations* (Academic Press, New York, 1965).
[113] C.E. Porter and R.G. Thomas, *Phys. Rev.* **104** (1956) 483.
[114] M. Prähofer and H. Spohn, *Phys. Rev. Lett.* **84** (2000) 4882; *Physica* **A279** (2000) 342.
[115] T. Prosen, T.H. Seligman and H.A. Weidenmüller, *Europhys. Lett.* **55** (2001) 12; *J. Math. Phys.* **43** (2002) 5135.
[116] Z. Rudnick and P. Sarnak, *Duke Math. J.* **81** (1996) 269.
[117] 西條敏美,『虹—その文化と科学』(恒星社厚生閣, 1999).
[118] J. Schwinger, *J. Math. Phys.* **2** (1961) 407.
[119] 別冊・数理科学『量子カオスの物理と数理』(サイエンス社, 2000).
[120] A. Selberg, *Norsk Matematisk Tidsskrift* **26** (1944) 71.
[121] T.H. Seligman and H. Nishioka (editors), Quantum Chaos and Statistical Nuclear Physics, Lecture Notes in Physics **263** (Springer, 1986).
[122] M. Sieber and K. Richter, *Physica Scripta* **90** (2001) 128.
[123] B.D. Simons and B.L. Altshuler, *Phys. Rev. Lett.* **70** (1993) 4063; *Phys. Rev.* **B48** (1993) 5422.
[124] H.J. Sommers, A. Crisanti, H. Sompolinsky and Y. Stein, *Phys. Rev. Lett.* **60** (1988) 1895.
[125] A. Soshnikov, *Comm. Math. Phys.* **207** (1999) 697, preprint(math-ph/9907013) version 2 (2003).
[126] M.A. Stephanov, *Phys. Rev. Lett.* **76** (1996) 4472.
[127] G. Strang, *Linear Algebra and its Applications* (Academic Press, 1976) [邦訳:『線形代数とその応用』井上昭訳 (産業図書, 1978)].
[128] E. Study, *Acta Math.* **42** (1920) 1.
[129] B. Sutherland, *J. Math. Phys.* **12** (1971) 246; 251.
[130] B. Sutherland, *Phys. Rev.* **A4** (1971) 2019; **A5** (1972) 1372.
[131] G. Szegö, *Orthogonal Polynomials* (4th edition, American Mathematical Society, 1975).
[132] C. Tracy and H. Widom, Lecture Notes in Physics **424** (1993) 103.
[133] C. Tracy and H. Widom, *Comm. Math. Phys.* **159** (1994) 151.
[134] C. Tracy and H. Widom, *Comm. Math. Phys.* **161** (1994) 289.
[135] C. Tracy and H. Widom, *Comm. Math. Phys.* **163** (1994) 33.
[136] C. Tracy and H. Widom, *Comm. Math. Phys.* **177** (1996) 727.
[137] J.J.M. Verbaarschot, H.A. Weidenmüller and M.R. Zirnbauer, *Phys. Rep.* **129**

(1985) 367.
[138] J.J.M. Verbaarschot and I. Zahed, *Phys. Rev. Lett.* **70** (1993) 3852.
[139] F.J. Wegner, *Z. Phys.* **B35** (1979) 209.
[140] E.P. Wigner, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **47** (1951) 790.
[141] E.P. Wigner, *Canadian Mathematical Congress Proceedings* (University of Toronto Press, 1957) 174.
[142] E.P. Wigner, *Ann. Math.* **67** (1958) 325.
[143] J. Wishart, *Biometrika* **20A** (1928) 32.
[144] F. Zhang, *Linear Algebra Appl.* **251** (1997) 21.
[145] J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena* (Oxford Univesity Press, 2002).
[146] M.R. Zirnbauer, *J. Math. Phys.* **37** (1997) 4986.
[147] J.A. Zuk, Introduction to the Supersymmetry Method for the Gaussian Random-Matrix Ensembles, preprint(cond-mat/9412060).

索 引

著者略歴

永尾太郎（ながお・たろう）
1966 年生まれ．東京大学大学院理学系研究科物理学専攻修了．博士（理学）．大阪大学大学院理学研究科物理学専攻助手を経て，現在，名古屋大学大学院多元数理科学研究科助教授．

ランダム行列の基礎

2005 年 2 月 22 日　初　版

[検印廃止]

著　者　永尾太郎
発行所　財団法人 東京大学出版会
代表者 五味文彦
113–8654 東京都文京区本郷 7–3–1 東大構内
電話 03–3811–8814　Fax 03–3812–6958
振替 00160–6–59964
印刷所　三美印刷株式会社
製本所　牧製本印刷株式会社

ISBN 4–13–061306–5 Printed in Japan